Tentamen Algebra 1, donderdag 17 juni 2010, 14.00u–17.00u
Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

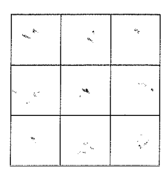
Opgave 1. Definieer $\sigma, \tau \in S_8$ door

$$\sigma = (3\,7\,8)(3\,5\,6)(1\,3\,4)(1\,2\,3),$$
$$\tau = (1\,5\,7)(2\,3\,4).$$

(a) Wat is de orde van σ?
(b) Wat is de orde van $\tau\sigma\tau^{-1}$?
(c) Bepaal $\sigma^{2014^{2010}}$.

Opgave 2. Beschouw het homomorfisme $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$ dat een geheel getal n stuurt naar $(3n \bmod 7, 3n \bmod 18)$.
(a) Zit $(5 \bmod 7, 3 \bmod 18)$ in het beeld van f?
(b) Hoeveel elementen heeft het beeld?
(c) Geef een verzameling voortbrengers van de kern van f.

Opgave 3. Een *negentegel* is een vierkante tegel die verdeeld is in negen kleine vierkantjes, zoals onder. De negentegel is symmetrisch in alle gesuggereerde opzichten. De kleine vierkantjes zijn rood of wit gekleurd. De achterkant van de tegel is grijs.



(a) Hoeveel verschillende negentegels zijn er?
(b) Er wordt een versie van de negentegel op de markt gebracht die eruit ziet als boven, maar die uit negen vierkante stukjes glas bestaat, die elk rood of wit zijn. Hoeveel verschillende van deze nieuwe negentegels zijn er?

Opgave 4. Bepaal van de volgende groepen welke isomorf zijn en welke niet: D_3, $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^*$, $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$, $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^*$. (Zie §6 van de syllabus voor de definitie van $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$.)

Opgave 5. (a) Zij G een groep en $N \subset G$ een normale ondergroep van eindige index n. Bewijs dat $x^n \in N$ voor alle $x \in G$.
(b) Laat zien dat in onderdeel (a) de eis dat N normaal is niet weggelaten kan worden. Met andere woorden: vind een groep G en een ondergroep $H \subset G$ van eindige index n zodanig dat *niet* geldt dat $x^n \in H$ voor alle $x \in G$.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.