Toets Analyse 2

Dinsdag 8 maart 2010, 9:00-11:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

---

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S} = \{z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 5.$$

(a) Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}$ aan de hand van minstens 3 niveaukrommen.

(b) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan $\mathcal{S}$ door het punt $(2,1,3)$.

(c) Bepaal een expliciete uitdrukking van de verzameling $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ van alle punten $(a,b,c) \in \mathcal{S}$ waarvan het raakvlak door (a,b,c) aan $\mathcal{S}$ door het punt $(0,3,0)$ gaat.

2. Definieer voor $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ en $d > 0$,

$$g(|\vec{x}|) = \frac{1}{(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2})^d}. \qquad (1)$$

Ter herinnering is gegeven dat een functie $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch is (op het gebied D) als geldt dat $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$.

(a) Neem $n = 3$ en $d = 1$: laat zien dat $g(\vec{x})$ harmonisch is op $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

(b) Neem nu $n > 3$. Bepaal $d = d(n)$ zodanig dat $g(\vec{x})$ harmonisch is op $\mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$.

(c) Neem $n = 2$. Bepaal een functie $\tilde{g}(|\vec{x}|)$ – niet noodzakelijk van de vorm (1) – die harmonisch is op $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

3. Beschouw de afbeelding $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$H(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2).$$

(a) Bepaal in het punt $(1,1,1)$ de richtingsafgeleide van $H(x,y,z)$ in de richting van $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Beschouw een deeltje dat zich beweegt door het vlak $V = \{x + 2y + 3z = 6\}$ en dat zich bevindt in het punt $(1,1,1) \in V$. Bepaal de richting waarin het deeltje kan bewegen zodaning dat de waarde van H gelijk blijft aan $H(1,1,1) = \frac{3}{2}$. (Onthou hierbij dat het deeltje het vlak V niet kan verlaten.)

(c) Bepaal de richting waarin het deeltje moet bewegen om H zo sterk mogelijk te laten toenemen.

4. Beschouw de kromme $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door parametrizatie

$$x(t) = -t^2 \sin t, \quad y(t) = t^2 \cos t, \quad z(t) = \frac{1}{16}t^4 \quad \text{voor} \quad t \geq 0.$$

(a) Geef een schets van de kromme $\mathcal{K}_2 = \{(x(t), y(t))\}$ in het (x,y)-vlak.

(b) Bepaal een oppervlak $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ zodaning dat $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ (beschouw hiertoe $x(t)^2 + y(t)^2$).

(c) Bepaal de lengte van het gedeelte van $\mathcal{K}$ tussen de punten $(0,0,0)$ $(t = 0)$ en $(0, 4\pi^2, \pi^4)$ $(t = 2\pi)$.