Tentamen Analyse 2

Donderdag 9 juni, 14:00 - 17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.

---

1. Beschouw het oppervlak $\mathcal{S}_1 = \{z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = [2(x^2+y^2)]^{\frac{1}{4}}. \qquad (1)$$

(a) Gegeven is dat $f(x,y)$ continu is in het punt $(0,0)$. Is $f(x,y)$ ook differentieerbaar in $(0,0)$? Leg uit.

(b) Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}_1$.

(c) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan $\mathcal{S}_1$ door het punt $(1,1,\sqrt{2})$.

2. Het oppervlak $\mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door $\mathcal{S}_2 = \{x^2+y^2+z^2 = 4\}$. Het gebied $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ ligt ingesloten tussen $\mathcal{S}_1$ (zie som 1) en $\mathcal{S}_2$ op zo'n manier dat $\mathcal{D}$ *onder* $\mathcal{S}_1$ ligt (i.e. voor $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ geldt dat $z \leq f(x,y)$ (1)). De rand $\partial\mathcal{D}$ van $\mathcal{D}$ bestaat uit twee gedeelten, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S}_1$ en $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{S}_2$; $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$ snijden elkaar in de kromme $\mathcal{C}$.

(a) Bepaal $\mathcal{C}$ en geef een parametrisatie van $\mathcal{C}$, met oriëntatie tegen de klok in, gezien vanaf een punt op de z-as boven $\mathcal{S}_2$.

(b) Geef een schets van $\mathcal{D}$.

(c) Bepaal het volume $\mathrm{Vol}(\mathcal{D})$ van $\mathcal{D}$.

3. Definieer het vectorveld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door middel van

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

(a) Bepaal $\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ en $\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$.

(b) Zij $\vec{N}$ de naarbuiten wijzende normaal op $\mathcal{D}$ (zie som 2). Bepaal $\iint_{\mathcal{B}_2} \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ (met $\mathcal{B}_2$ zoals gedefinieerd in som 2).

(c) Bepaal $\iint_{\mathcal{B}_1} \vec{F}\cdot\vec{N}dS$.

4. (a) Bepaal $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ op basis van een parametrisatie van de kromme $\mathcal{C}$ (zie som 2a) – met $\vec{F}$ zoals gedefinieerd in som 3 (2) en de oriëntatie van $\mathcal{C}$ zoals beschreven in onderdeel 2a.

(b) De kromme $\mathcal{C}$ is natuurlijk ook te zien als de rand van het oppervlak $\mathcal{B}_2$. Bepaal nogmaals $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, nu gebruikmakend van de Stelling van Stokes.

5. Beschouw het punt $P = (0,0,-1) \in \mathcal{D}$ (met wederom $\mathcal{D}$ zoals gedefinieerd in som 2) en definieer de functie $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt $d(x,y,z) = x^2+y^2+(z+1)^2$: $d(x,y,z)$ is het kwadraat van de afstand tussen P en een punt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Leg uit dat $d(x,y,z)$ voor $(x,y,z) \in \partial\mathcal{D} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ zowel een minimale als een maximale waarde moet aannemen.

(b) Gebruik de multiplicatoren van Langrange methode om de minimale afstand tussen P en $\partial\mathcal{D}$ te bepalen. Voor welke $(x_m, y_m, z_m) \in \partial D$ neemt $d(x,y,z)$ deze minimale waarde aan?

(c) Bepaal de maximale afstand tussen P en $\partial\mathcal{D}$. Voor welke $(x_M, y_M, z_M) \in \partial D$ neemt $d(x,y,z)$ z'n maximale waarde aan?