

# Tentamen Besliskunde 1

## (Woensdag 17-12-2008, 14.00-17.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat, de zelf gemaakte opgaven en eventueel ander materiaal worden gebruikt. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

### Deel 1: Theorie

#### Opgave 1: Stelling van Ore

Zij  $G = (V, E)$  een normale graaf met  $n$  knooppunten. De graad van een knooppunt  $x$  wordt genoteerd met  $d(x)$ . Bewijs de volgende bewering:

*Als  $d(v) + d(w) \geq n$  voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten  $v, w \in V$ , dan heeft  $G$  een Hamilton kring.*

#### Opgave 2: Homogene recurrente betrekkingen

Beschouw de homogene recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, & n = 3, 4, \dots \\ a_1, a_2 \text{ gegeven randvoorwaarden,} \end{cases}$$

waarin  $A$  en  $B$  constanten zijn die niet van  $n$  afhangen.

Toon het volgende aan:

- (1) *Als de karakteristieke vergelijking  $x^2 - Ax - B = 0$  twee verschillende wortels  $\alpha$  en  $\beta$  heeft, dan is  $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ ,  $n \geq 1$ , waarbij  $K_1$  en  $K_2$  uniek worden bepaald door  $a_1$  en  $a_2$ .*
- (2) *Als de karakteristieke vergelijking  $x^2 - Ax - B = 0$  een tweevoudige wortel  $\alpha$  heeft, dan is  $a_n = (K_1 + nK_2)\alpha^n$ ,  $n \geq 1$ , waarbij  $K_1$  en  $K_2$  uniek worden bepaald door  $a_1$  en  $a_2$ .*

#### Opgave 3: Stationaire matrix

Zij  $x$  een stationaire kansverdeling van de Markov keten met overgangsmatrix  $P$ .

Laat  $R_1, R_2, \dots, R_m$  de recurrente klassen zijn,  $T$  de verz. van de transiënte toestanden en noteer de stationaire matrix met  $P^*$ .

Bewijs de volgende bewering:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{als } i \in T \\ c_k p_{ii}^* & \text{als } i \in R_k, \text{ met } c_k \geq 0, 1 \leq k \leq m, \text{ en } \sum_{k=1}^m c_k = 1. \end{cases}$$

## Deel 2: Opgaven

### Opgave 4: Voortbrengende functies

Zij  $f(x)$  de voortbrengende functie van de 'vershoven' Fibonacci-getallen  $a_n$  met  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  en  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

- Toon aan dat  $(1 - x - x^2)f(x) = 1$ .
- Leid hiermee af dat  $a_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i}$  voor  $n \geq 0$ .

Aanwijzing:

Schrijf  $(1 - x - x^2)^{-1}$  als  $\{1 - (x + x^2)\}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (x + x^2)^k$  en werk dit verder uit.

### Opgave 5: Simplex methode

- Los het volgende LP-probleem op:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4; \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \quad x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2; \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

- Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

### Opgave 6: Markov ketens

Beschouw de irreducibele Markov keten op  $\mathbb{N}_0$  met  $p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+2} & \text{als } 0 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{als } j > i+1 \end{cases}$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ .

- Toon aan dat voor de stationaire kansverdeling  $\pi$  van deze keten geldt:  $\pi_i = \frac{1}{i!} \pi_0$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ .
- Bepaal de stationaire kansverdeling  $\pi_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ .