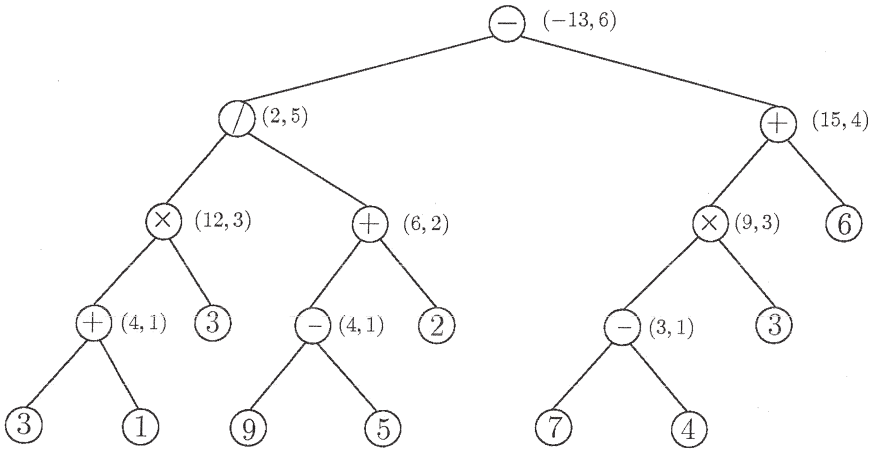
$$e(i,j) = \begin{cases} p_i & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i > j \\ min_{i \le r \le j} e(i, r-1) + e(r+1, j) + \sum_{k=i}^{j} p_k & \text{als } i < j \end{cases}$$

c) Geef een algoritme voor het vullen van de array. Wat is de tijdscomplexiteit van dit algoritme? Motiveer je antwoord.

d) Een alternatief voor dit DP-algoritme is een gretig algoritme dat een zoekboom opbouwt door telkens het woord met de hoogste frequentie te kiezen als wortel van de (sub-)boom. Laat zien welke binaire zoekboom dit algoritme oplevert voor Tabel 1 en toon aan dat dit geen optimale oplossing is.

Vraag 2: Evaluatie rekenkundige expressie (22 punten)

Een rekenkundige expressie, zoals $((((3+1)\times 3)/((9-5)+2)) - (((7-4)\times 3)+6))$, die door een compiler geevalueerd moet worden, kan gerepresenteerd worden door een (geordende) binaire boom, zie bijgaande figuur voor de binaire boom horende bij deze expressie, met per interne knoop de waarde van die knoop (de linkerwaarde tussen haakjes).



Een knoop in deze boom ziet er als volgt uit:

```
struct knoop {
knoop* links;
knoop* rechts;
knoop* ouder;
char operator; // '+', '-', '/', 'x' of het ascii karakter NUL
int waarde;
int tijd;
}; // knoop
```

Het veld `operator` bevat de operator die bij een interne knoop hoort, of `NUL` als de knoop een blad is. Het veld `waarde` is initieel alleen voor de bladeren gevuld, en bevat dan de waarde die bij het blad hoort. Het veld `tijd` is initieel niet gevuld.

a) Geef een recursieve functie (in pseudo-code) `EVALUEER(knoop *wortel)` die voor iedere interne knoop het veld `waarde` vult met de waarde van de sub-expressie behorende bij de sub-boom waarvan die knoop de wortel is.

We willen weten hoeveel tijd het kost om de expressie uit te rekenen. Een operator kan pas worden toegepast als de deelexpressies in beide subbomen zijn uitgerekend. Deze beide deelexpressies kunnen parallel worden uitgerekend. Een vermenigvuldiging of deling kost twee tijdseenheden, een optelling of aftrekking een tijdseenheid. In de voorbeeldboom is de resulterende tijd aangegeven bij de interne knopen (de rechterwaarde tussen de haakjes).

b) Geef aan hoe bij *branch and bound* deeloplossingen worden opgebouwd, wat er bij iedere stap (knoop) in de state-space-tree wordt berekend en gecontroleerd, en hoe *best-fit-first* branch and bound werkt voor minimalisatieproblemen zoals dit probleem. Geef duidelijk aan wat de verschillen zijn met backtracking.

c) Beschrijf in woorden een *branch and bound* algoritme dat het pizza-bezorgprobleem oplost, pas het algoritme toe op het voorbeeld en teken de state-space-tree. Geeft duidelijk aan in welke volgorde de knopen bezocht worden. Geef ook aan welke ondergrens je voor het totaal aantal bezorgminuten gebruikt, en wat deze ondergrens *bij iedere deeloplossing* is.

Einde van dit tentamen. Veel succes!

b) Geef een recursieve functie `REKENTIJD(knoop *wortel)` die voor *iedere* knoop het veld `tijd` vult met de benodigde tijd om de deelexpressie bij die knoop uit te rekenen.

c) Nu gaan we een blad `oud` (zonder operator dus) vervangen door een subboom met drie knopen: een knoop `nieuw` met een operator, met als linkerkind een knoop met een waarde en als rechterkind een knoop met een waarde. In deze subboom zijn de velden `tijd` nog niet ingevuld. We kunnen bijvoorbeeld de knoop met waarde '6' vervangen door een subboom met '+' als operator en '2' en '4' als bladeren. Geef een niet-recursieve functie `VERVANG(knoop *oud, knoop *nieuw)` die deze vervanging uitvoert, en daarbij op een efficiente manier de velden `tijd` in de boom aanpast.

Vraag 3: NIM-voor-drie (23 punten)

De drie vrienden (althans, voorlopig nog wel) Adrie, Bert en Caspar spelen een variant van het spelletje NIM. Alledrie hebben ze een stapel lucifers voor zich en om beurten mogen ze van hun eigen stapel *twee* lucifers pakken, en daarvan *één* lucifer op een van de andere stapels leggen. Daarna is de volgende aan zet: eerst Adrie, dan Bert, dan Caspar en dan weer Adrie enzovoorts. Het spel is afgelopen als de speler die aan zet is nog maar een of twee lucifers heeft. Merk op dat het totaal aantal lucifers bij iedere zet één minder wordt. *Optimaal spel* betekent bij dit spel, dat spelers kiezen voor een zet waarbij ze (de grootste) kans om te winnen hebben. Als een speler in een bepaalde stand geen kans meer heeft om te winnen (bij optimaal spel van de andere spelers) kan hij een willekeurige zet doen.

Stel dat het spel begint met n lucifers voor iedereen (dus in totaal drie maal n lucifers)

a) Wat zijn de mogelijke toestanden en acties in dit spel? Geef het volledige toestand-actie-diagram voor dit spel, beginnend met Adrie en met ieder drie lucifers. Geef bij elke toestand aan voor wie deze winnend is / kan zijn.

b) Heeft Adrie in deze start-toestand (ieder drie lucifers, Adrie aan zet) een *winnende* strategie? Zo ja, geef aan wat die strategie is; zo nee, leg uit waarom!

c) Neem nu de situatie waarin Caspar aan zet is en er nog twee lucifers voor Adrie, twee voor Bert, en vijf voor Caspar zelf op tafel liggen. Laat met een toestand-actie-diagram zien dat Caspar niet meer kan winnen, maar dat Caspar wel kan bepalen of Adrie of Bert wint.

Vraag 4: Pizza's bezorgen (25 punten)

Een pizzabedrijf heeft vier vestigingen in de stad en een call-center waarbij de bestellingen binnenkomen. Iedere vestiging heeft één bezorger. Op enig moment komen er vier bestellingen binnen bij het call-center die over de vier vestigingen verdeeld moeten worden. Iedere vestiging kan in principe iedere klant bedienen, maar de bezorgtijd verschilt natuurlijk en is afhankelijk van de precieze locatie van klant en vestiging. Die bezorgtijd vind je hieronder (Tabel 2) voor iedere combinatie van klant en vestiging.

Tabel 2 - bezorgtijden per klant en vestiging

	klant 1	klant 2	klant 3	klant 4
vestiging A	12	35	7	6
vestiging B	8	17	10	13
vestiging C	14	14	12	6
vestiging D	9	21	9	12

Het pizza-bedrijf wil de *totale bezorgtijd* minimaliseren, en daarmee ook de tijd dat de bezorgers onderweg zijn.

a) Beschrijf in woorden een *backtracking* algoritme voor dit probleem voor algemene n en licht het toe aan de hand van het voorbeeld. Teken de eerste twee niveaus van de state-space-tree (dus de wortel en de kinderen van de wortel) *volledig* en werk de state-space-tree voor het *eerste* kind volledig uit. De rest van de state-space-tree hoef je niet uit te werken. Geef de volgorde aan waarin de knopen (deeloplossingen) bekeken worden.