Uitwerking opgave 4, Tentamen Complexiteit, augustus 2008

a. Werking van het algoritme:
$d = 2$:
$A = 9, 11, 7, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 20, 10, 12, 15, 16, 5, 14$ (beginsituatie)
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 20, 10, 12, 15, 16, 5, 14$
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 20, 10, 12, 15, 16, 5, 14$
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 10, 12, 20, 15, 16, 5, 14$
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 10, 12, 20, 5, 14, 15, 16$
$d = 4$:
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 10, 12, 20, 5, 14, 15, 16$ (geen wissels)
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 21, 6, 10, 12, 15, 5, 14, 16, 20$
$d = 8$:
$A = 9, 7, 11, 13, 3, 4, 18, 16, 6, 10, 12, 15, 5, 14, 20, 21$

b. Alles (in orde van grootte) afschatten op regel 3 en/of regel 12 en/of regel 16.
#(regel 1) = 1 = #(regel 8) = O(#(regel 3)) vanwege (**)
#(regel 4) $\leq$ #(regel 3)
#(regel 6) = #(regel 3)
Merk op: (**) #(regel 3) ≥ 1, omdat $n \geq 1$
Gevolg: #(regel 2) = #(regel 3) + 1 $\leq$ 2·#(regel 3) = O(#(regel 3))
Als $n = 2$ worden regels 9 t/m 25 niet gedaan, dus dan is alles af te schatten op regel 3.
We bekijken nu de tweede while-loop. Als $n > 2$ wordt de tweede while minstens 1 keer doorlopen. Merk op dat altijd als $d < n$ de binnenste while minstens 1 keer wordt uitgevoerd (namelijk met $i = d < n$). Dus per doorgang door de buitenste while worden zowel regel 12 als regel 16 minstens 1x gedaan. Dan geldt:
#(regel 13) = #(regel 14) $\leq$ #(regel 12)
#(regel 17) $\leq$ #(regel 16)
#(regel 19) $\leq$ #(regel 18) $\leq$ #(regel 16)
#(regel 22) = #(regel 12)
#(regel 24) = #(regel 10) $\leq$ #(regel 12), want regel 12 wordt per keer dat regel 10 wordt gedaan ten minste 1x uitgevoerd.
#(regel 11) = #(regel 12) + 1 $\leq$ 2#(regel 12) per doorgang buitenste while, dus ook in totaal.
En ten slotte: #(regel 9) = #(regel 10) + 1 = O(#(regel 12)).
Aldus zijn alle regels afgeschat op het aantal keer dat regel 3 of 12 of 16 plaatsvindt.

c. Oplopend gesorteerd, d.w.z. (&) $A[i] < A[i + 1]$ voor alle i. Dan geen verwisselingen in de eerste while. Dus na afloop daarvan geldt (&) nog steeds. Bij de eerste doorgang door de tweede while is de test in regel 12 false, dus er wordt niet gewisseld, en j blijft groter dan i, en derhalve zijn de tests in regel 16 en 18 beide false. Kortom, er wordt niet gewisseld en (&) blijft gelden. Dit gaat dan voor elke doorgang en elke d zo. Dus A blijft hetzelfde en er hebben geen verwisselingen plaatsgevonden. Dus het oplopend gesorteerde rijtje is een best case geval wat betreft het aantal verwisselingen.
Aflopend gesorteerd, d.w.z. $A[i] > A[i + 1]$ voor alle i. In de eerste while wordt nu juist elke doorgang gewisseld ($\frac{n}{2}$ verwisselingen). De grootste van de twee elementen op plekken i,$i + 1$ staan nu steeds op de even posities, en wel in aflopende volgorde. Kijk nu voor $d = 2$. De test in regel 12 is nu true voor elke i, dus er wordt gewisseld en j verandert

(wordt $i-1$), dus de tweede wissel wordt ook zeker gedaan. Nu geldt dat de grootste en de opeennagrootste van elk viertal op het eind staan, maar nog steeds geldt voor achtereenvolgende viertallen dat de waarden uit eerdere viertallen groter zijn dan viertallen die erna komen. Dus is voor $d = 4$ de test in regel 12 true, etcetera. Dit gebeurt voor elke waarde van d. Per ronde wordt dus het maximale aantal verwisselingen gedaan. Dus het aflopend gesorteerde rijtje is inderdaad een worst case geval.

d. Voor een best case (0 verwisselingen) moet gelden dat $A[i] < A[i+1]$ voor alle oneven i. Opdat voor $d = 2$ geen verwisselingen plaatsvinden moet ook $A[i] < A[i+2]$ voor $i = 2, 6$. Per viertal moet het dus wel stijgend zijn. Voor $d = 4$ worden eerst $A[4]$ en $A[8]$ vergeleken, en indien niet wordt gewisseld ($A[4] < A[8]$) worden verder alleen nog $A[4]$ en $A[7]$ vergeleken (en $A[4]$ moet kleiner zijn dan $A[7]$ voor een best case). De andere elementen uit de betrokken viertallen dus niet. De getallen op posities 1, 2, 5 en 6 worden nooit meer bekeken. Die hoeven dus niet oplopend te zijn. Een voorbeeld van een ander best case geval is derhalve: $1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8$

Voor een worst case rijtje moet juist $A[i] > A[i+1]$ voor alle oneven i. Een ander voorbeeld dan het aflopende rijtje is b.v.: $8, 6, 7, 5, 4, 2, 3, 1$; na de eerste while is dit rijtje veranderd in het rijtje: $6, 8, 5, 7, 2, 4, 1, 3$. Voor $d = 2$ worden $A[2]$ en $A[4]$ vergeleken en verwisseld, en dientengevolge worden in regel 16 de oude $A[4]$ en $A[1]$ vergeleken en er vindt weer een verwisseling plaats. Het viertal ziet er daarna als volgt uit: $6, 5, 7, 8$. Hetzelfde voor het volgende viertal. Voor $d = 4$ ten slotte worden de elementen op plek 1, 2, 5 en 6 niet meer bekeken, dus hun onderlinge volgorde doet er niet toe. Andere voorbeelden van worst case rijtjes zijn: $8, 2, 7, 1, 6, 4, 5, 3$; $8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4$; $8, 2, 5, 4, 7, 3, 6, 1$. Als je maar zorgt dat er voor elke d in regel 13 gewisseld wordt, dan wordt ook in regel 16 t/m 21 gewisseld en heb je dus een worst case geval.