2e Deeltentamen Continue Wiskunde voor informatici

woensdag 15 december 2004, 11.00-13.15 uur

- Alleen het gebruik van niet-programmeerbare rekenmachines is toegestaan.
- Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je er aan komt.
- Vul op elk tentamenpapier **duidelijk leesbaar** je naam en collegekaartnummer in.

1. *a)* Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k+1}$.

b) Onderzoek of $f(x)$ convergeert of divergeert voor $x = 1$, $x = 2$.

c) Bepaal $f^{(5)}(0)$ (de waarde van de 5e afgeleide van f in 0).

2. Gegeven is de functie $f(x) = \log(1 + 3x)$.

a) Bepaal het tweede Taylorpolynoom $p_2(x)$ van $f(x)$ rond $x = 0$. Bepaal ook de restterm.

b) Laat zien dat $|f(x) - p_2(x)| < \frac{1}{100}$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{10}$.

3. *a)* Teken in het complexe vlak de complexe getallen z die voldoen aan $|z - i| \leq 2$ en $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

b) Bepaal de oplossingen van $z^2 - 4z + 8 = 0$ en schrijf die in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Bepaal de oplossingen van $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$ en schrijf die in de vorm $\rho e^{i\psi}$ met $\rho > 0$ en $\psi \in \mathbb{R}$.

4. Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

a) $y^2 y' + \sin x = 0$.

b) $y' + x^2 y = 2xe^{x^2 - \frac{1}{3}x^3}$.

Normering (onder voorbehoud:)
1a 4pt, 1b 3pt, 1c 3pt; 2a 5pt, 2b 5pt; 3a 3pt, 3b 3pt, 3c 4pt;
4a 5pt, 4b 5pt
Totaal 40 punten; cijfer = (aantal punten)/4.

Het nagekeken tentamen kan op **vrijdag 17 december** worden afgehaald op kamer 228. Daarna kan het tentamen worden meegenomen van de kast tegenover kamer 203.

ZIE DE ACHTERKANT VOOR EEN LIJSTJE FORMULES

Goniometrie:

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \sin y; \quad \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x); \quad \sin(\pi - x) = \sin x; \quad \sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x$

$\sin 0 = 0; \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Standaardlimieten voor functies en rijen:

$\lim_{x\downarrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x\uparrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{a^x} = 0$ voor $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^p}{x^q} = 0$ voor $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$; $\quad \lim_{x\downarrow 0} x^p \log x = 0$ voor $p > 0$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ voor $p \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ als $|r| < 1$; $\quad 1$ als $r = 1$; $\quad \infty$ als $r > 1$; $\quad$ bestaat niet als $r \leq -1$

Afgeleiden:

$(x^a)' = ax^{a-1}; \quad (e^x)' = e^x; \quad (\log x)' = x^{-1}$

$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (\tan x)' = \tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Machtreeksen:

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \ (-1 < x < 1)$

$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \ (-1 < x \leq 1)$

$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots \ (-1 < x \leq 1)$

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \ (x \in \mathbb{R})$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \ (x \in \mathbb{R})$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \ (x \in \mathbb{R})$