ANTWOORDEN BIJ DE OPGAVEN VAN DEELTOETS I, oktober 2006.

1a. Invullen levert op 0/0. De stelling van de l'Hôpital toepassen geeft

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x}.$$

De tweede limiet invullen geeft weer 0/0. Nogmaals l'Hôpital toepassen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan^2 x - 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

b. Invullen geeft $\infty - \infty$. We passen de worteltruc toe:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{e^{2x}+x} - e^x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+x-e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+x}+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}+x}+e^x}.$$

Invullen in de laatste limiet geeft ∞/∞. De dominante termen in de noemer zijn de beide e-machten. Omdat de e-macht domineert over x is de limiet 0.

2. Gebruik de kettingregel. We hebben de keten van functies: $x \to x^3 - x = u, u \to \sin u = v, v \to e^v$. De afgeleide is het product van de afgeleiden van de schakels:

$$[e^{\sin(x^3+x)}]' = [x^3-x]' \cdot [\sin u]' \cdot [e^v]' = (3x^2-1)\cos u \cdot e^v = (3x^2-1)\cos(x^3-x) \cdot e^{\sin(x^3-x)}.$$

3a. Partieel integreren geeft:

$$\int x \sin 5x dx = \int x[-\frac{1}{5}\cos 5x]' dx = -\frac{1}{5} x \cos 5x - \int -\frac{1}{5}\cos 5x [x]' dx = -\frac{1}{5}x\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x.$$

b. Merk op dat $6x^2 - 6 = 2[x^3 - 3x + 1)^{2/3}]'$. Dus is

$$\int \frac{6x^2-6}{(x^3-3x+1)^{2/3}} dx = \int \frac{2[x^3-3x+1]'}{(x^3-3x+1)^{2/3}} dx = \int \frac{2}{u^{2/3}} du = 6u^{1/3} + C = 6(x^3-3x+1)^{1/3} + C.$$

4. De inwendige producten van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ met de drie andere vectoren zijn resp. $1, 0, \sqrt{3}$. De lengte van de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ is $\sqrt{1^2+0^2+3} = 2$ en van de drie andere vectoren is de lengte 1. Met de formule $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}$ vinden we resp. $\cos\theta = \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de hoeken zijn dus $60^o, 90^o$ resp. 30^o.

5a. De gradiënt is

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x^2y) + 2x^2\cos(x^2y) \\ x^3\cos(x^2y) \end{pmatrix}.$$

b. De richting van de steilste helling in $(-1, \pi)$ is

$$\nabla f(-1,\pi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi) \\ -\cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De grootte van de helling is dan $\|\nabla f(-1,\pi)\| = \sqrt{5}$.

ANTWOORDEN BIJ DE OPGAVEN VAN DEELTOETS II, december 2006.

1a. De partiële afgeleiden zijn:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - y^2 - 2x, \qquad f_y(x,y) = -2xy + 2y = 2y(-x+1).$$

(x,y) is een stationair punt als beide partiële afgeleiden nul zijn in (x,y). Uit $f_y(x,y) = 2y(-x+1) = 0$ volgt dat $y = 0$ of $x = 1$. Als we $y = 0$ invullen in $f_x(x,y) = 0$, dan krijgen we $3x^2 - 2x = 0$ dus $x = 0$ of $x = 2/3$. Als we $x = 1$ invullen in $f_x(x,y) = 0$, dan krijgen we $y^2 = 1$ dus $y = 1$ of $y = -1$. De stationaire punten zijn dus $(0,0)$, $(2/3,0)$, $(1,1)$ en $(1,-1)$.

b. Om de aard van de stationaire punten te bepalen, bekijken we de Hessiaan $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Nu is

$$f_{xx}(x,y) = 6x - 2, \qquad f_{yy}(x,y) = -2x + 2, \qquad f_{xy}(x,y) = -2y.$$

Dan is dus

$$H(0,0) = -4, \qquad H(2/3,0) = 4/3, \qquad H(1,1) = H(1,-1) = -4.$$

In $(2/3,0)$ is de Hessiaan positief; verder is $f_{xx}(2/3,0) = 2$ positief, dus f neemt in $(2/3,0)$ een minimum aan. In de overige drie punten is de Hessiaan negatief; dit zijn dus zadelpunten van f.

2. De karakteristieke vergelijking is $x^2 - 3x + 2 = 0$; de oplossingen zijn $x = 1$ en $x = 2$. De oplossing van de homogene recurrentie is dan

$$a_n^{\mathrm{hom}} = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n.$$

Voor een particuliere oplossing b_n bepalen we een aanverwante functie. Een goede keuze lijkt $b_n = C$ met C een constante, maar dit werkt niet omdat $b_n = C$ al een oplossing is van de homogene recurrentie. Neem dus een eerstegraadspolynoom $b_n = Cn+D$. Invullen in de recurrente betrekking geeft

$$Cn + D = 3C(n-1) + 3D - 2C(n-2) - 2D + 3.$$

De termen met D vallen tegen elkaar weg, zoals eigenlijk al te verwachten was (immers constante rijen voldoen aan de homogene recurrentie), verder vinden we $C = -3$. De algemene oplossing is dus

$$a_n^{\mathrm{alg}} = A + B \cdot 2^n - 3n.$$

Nu vullen we de beginvoorwaarden $a_1 = 1, a_2 = 4$ in; dit levert $A = -2$ en $B = 3$. De oplossing is dus

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3n - 2.$$

3. De functie $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ is monotoon stijgend voor $x \geq 1$. Dus is

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(N-1) < \int_1^N x\sqrt{x^2-1}dx < f(2) + f(3) + \ldots + f(N).$$

Hieruit volgt dat

$$f(1) + \int_1^N x\sqrt{x^2-1}dx < f(1) + f(2) + \ldots + f(N) < \int_1^N x\sqrt{x^2-1}dx + f(N). \qquad (*)$$

Nu is

$$\int_1^N x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\Big|_1^N = \frac{1}{3}(N^2-1)^{3/2},$$

en dus volgt uit $(*)$ dat

$$\frac{1}{3}(N^2-1)^{3/2} < \sum_{k=1}^{N} k\sqrt{k^2-1} < \frac{1}{3}(N^2-1)^{3/2} + N\sqrt{N^2-1}.$$

Omdat $N\sqrt{N^2-1} = O(N^2)$ volgt hieruit dat

$$\sum_{k=1}^{N} k\sqrt{k^2-1} = \frac{1}{3}(N^2-1)^{3/2} + O(N^2).$$

4. Te bewijzen is dat

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

voor n geheel en $n \geq 1$. De bewering is waar voor $n = 1$: $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$. Nu de inductiestap: neem aan dat de bewering waar is voor $n-1$: we nemen dus aan (inductie-veronderstelling) dat

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Hieruit volgt dat

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + n^2 =$$

$$= \frac{1}{6}n\big((n-1)(2n-1)+6n\big) = \frac{1}{6}n(2n^2-3n+1+6n) = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

De bewering geldt dus ook voor n. Hiermee is het bewijs voltooid.

5a. Dit onderdeel is in 2007 geen tentamenstof (het antwoord is $R = 2$).

b. Dit onderdeel is in 2007 geen tentamenstof (de antwoorden zijn: convergentie voor $x = 1$, uit (a) volgt immers dat de reeks convergeert voor $|x| < 2$; voor $x = 2$ is er geen convergentie want de termen $\dfrac{2^n}{2^n+1}$ gaan naar 1 als $n \to \infty$ (en dus niet naar nul).

c. De coëfficiënt van x^5 is $f^{(5)}(0)/5!$. Dus is

$$f^{(5)}(0) = \frac{5!}{2^5+1} = \frac{40}{11}.$$

6. Laat $f(x) = \ln(1+x)$. Dan is

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Dus

$$f(3x) = \ln(1+3x) = f(0) + f'(0)\cdot 3x + \frac{1}{2!}f''(0)\cdot(3x)^2 + O(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + O(x^3).$$

Het tweede Taylorpolynoom is dus $p_2(x) = 3x - 9x^2/2$. De restterm is

$$R(x) = \frac{1}{3!}f'''(\xi)(3x)^3 = \frac{9x^3}{(1+\xi)^3},$$

waarbij ξ ligt tussen 0 en $3x$.