Voorbeeld 2-de deeltentamen Continue Wiskunde voor Informatici
14 december 2006, 11.00-13.15 uur

Opgave 1 Gegeven is de functie $f(x, y) = x^3 - xy^2 - x^2 + y^2$.

a) Bepaal de stationaire punten van f;

b) Ga voor elk stationair punt na of f daarin een maximum of een minimum aannneemt.

Opgave 2 Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3, \quad n \geq 3. \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 4. \end{cases}$$

Opgave 3 Leid de volgende benaderingsformule af:

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k^2 - 1} = \frac{1}{3}(n^2 - 1)^{3/2} + \mathcal{O}(n^2).$$

Opgave 4 Laat met behulp van volledige inductie zien, dat

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Opgave 5 **a)** Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k + 1}$.

b) Onderzoek of $f(x)$ convergeert voor $x = 1$ en voor $x = 2$.

c) Bepaal $f^{(5)}(0)$ (de waarde van de 5-de afgeleide van f in $x = 0$.

Opgave 6 Gegeven is de functie $f(x) = \log(1 + 3x)$. Bepaal het tweede Taylorpolynoom $p_2(x)$ van $f(x)$ rond $x = 0$. Bepaal ook de restterm.

Zie achterkant voor een lijstje formules

Goniometrie

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y;$

$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Standaardlimieten voor functies

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0, \quad \text{als } q > 0.$$

Afgeleiden

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Enige reeksen

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent