TWEEDE DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE

donderdag 13 december 2007, 14.00-16.00

Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.
Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of beredenering.

---

1. Gegeven is de functie $f(x,y) = x^3 - 6xy - 12x + 2y^2$.

a. Laat zien dat f twee stationaire punten heeft en bepaal deze. (7 pt)

b. Ga van elk van de stationaire punten na of het een (locaal) maximum, minimum dan wel een zadelpunt van f is. (7 pt)

c. Wat is de richting van de grootste *afname* van f in het punt $(1,1)$? (3 pt)

d. En in welke richting (vanaf het punt $(1,1)$ gerekend) blijft de functiewaarde gelijk? (3 pt)

2. Bewijs m.b.v. volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad (n \geq 1). \qquad\qquad (10\text{ pt})$$

3. Bepaal de oplossing van de volgende recurrente betrekking:

$$\begin{cases} u_{n+2} - 6u_{n+1} + 8u_n = 3n - 1 \quad \text{voor } n \geq 0 \\ u_0 = 2,\ u_1 = 8. \end{cases} \qquad\qquad (10\text{ pt})$$

4. Leid de volgende benaderingsformule (voor grote waarden van N) af :

$$\sum_{k=3}^{N} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln N)^2 + \mathcal{O}(1).$$

Er mag worden gebruikt dat de functie $\dfrac{\ln x}{x}$ monotoon dalend is voor $x \geq 3$. (10 pt)

5. Gegeven is de functie $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

a. Bepaal het 2e orde Taylorpolynoom $p_2(x)$ rond $x = 0$. (6 pt)

b. Geef een uitdrukking voor de foutterm $g(x) - p_2(x)$ en laat aan de hand hiervan zien dat

$$\left| \sqrt[3]{\frac{13}{10}} - 1{,}09 \right| < 0{,}002. \qquad\qquad (7\text{ pt})$$

ANTWOORDEN.

1. De partiële afgeleiden zijn:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y - 12, \qquad f_y(x,y) = -6x + 4y.$$

(x,y) is een stationair punt als beide partiële afgeleiden nul zijn in (x,y). Uit $f_y(x,y) = -6x + 4y = 0$ volgt dat $y = \frac{3}{2}x$. Als we dit invullen in $f_x(x,y) = 0$, dan vinden we $3x^2 - 9x - 12 = 0$ dus $x = -1$ of $x = 4$. De stationaire punten zijn dus $(-1, -3/2)$ en $(4, 6)$.

b. Om de aard van de stationaire punten te bepalen, bekijken we de Hessiaan $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Nu is

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{yy}(x,y) = 4, \qquad f_{xy}(x,y) = -6$$

en dus is $H(x,y) = 24x - 36$. $H(-1,-3/2) = -60 < 0$ dus is $(-1, 3/2)$ een zadelpunt. $(4,6)$ is een (locaal) minimum omdat $H(4,6) = 60 > 0$ en $f_{xx}(4,6) = 24$ positief is.

c. De gradiënt $\nabla f = (3x^2 - 6y - 12, -6x + 4y)$ in het punt $(1,1)$ is gelijk aan $(-15,-2)$. De afname is dus het grootst in de (hieraan tegengestelde) richting $(15,2)$.

d. De functiewaarde blijft gelijk in de richting loodrecht op de gradiënt, dus $(-2, 15)$ (of in de tegengestelde richting $(2,-15)$).

2. Voor $n = 1$ staat aan beide zijden van het =-teken $1/3$, dus voor $n = 1$ is de bewering juist. Neem nu aan dat de bewering juist is voor $n - 1$, dus dat

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Dan is

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

De bewering is dus ook juist voor n. Hiermee is de bewering bewezen voor alle $n \geq 1$.

3. De karakteristieke vergelijking is $X^2 - 6X + 8 = 0$; oplossingen zijn $X = 2$ en $X = 4$. De oplossing van de homogene recurrentie is dus $A \cdot 2^n + B \cdot 4^n$. We zoeken een particuliere oplossing in de vorm $v_n = Cn + D$. Invullen geeft $C = 1, D = 1$. De algemene oplossing van de recurrente betrekking is dus $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n + n + 1$. Invullen van de beginvoorwaarden $u_0 = 2, u_1 = 8$ geeft dat $A = -1, B = 2$. De oplossing is dus

$$u_n = -2^n + 2 \cdot 4^n + n + 1.$$

4. De functie $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ is monotoon dalend voor $x \geq 3$. Dus is

$$f(4) + f(5) + \ldots + f(N) < \int_3^N \frac{\ln x}{x} dx < f(3) + f(4) + \ldots + f(N-1).$$

Hieruit volgt dat

$$f(N) + \int_3^N \frac{\ln x}{x} dx < f(3) + f(4) + \ldots + f(N) < \int_3^N \frac{\ln x}{x} dx + f(3). \qquad (*)$$

Nu is

$$\int_3^N \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_3^N = \frac{1}{2}(\ln N)^2 + \mathcal{O}(1),$$

en dus volgt uit $(*)$ en het feit dat $f(3), f(N)$ begrensd (en dus $\mathcal{O}(1)$) zijn dat

$$\sum_{k=3}^N f(k) = \sum_{k=3}^N \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln N)^2 + \mathcal{O}(1).$$

5a. Er geldt

$$g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}, \quad g''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}, \quad g'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

Nu is

$$p_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2.$$

b. De foutterm is

$$g(x) - p_2(x) = \frac{1}{6}g'''(y)x^3 = \frac{5}{81}(1+y)^{-8/3}x^3,$$

waarbij y in ligt tussen 0 en x. Voor $x = \frac{3}{10}$ vinden we dus

$$|g(\frac{3}{10}) - p_2(\frac{3}{10})| = |\sqrt[3]{\frac{13}{10}} - 1{,}09| = \frac{5}{81} \cdot \frac{27}{1000} \cdot (1+y)^{-8/3},$$

waarbij $0 < y < \frac{3}{10}$. Dan is $(1+y)^{-8/3} < 1$ en dus is

$$|\sqrt[3]{\frac{13}{10}} - 1{,}09| < \frac{5}{81} \cdot \frac{27}{1000} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3} < 0{,}002.$$

EERSTE DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE

donderdag 25 oktober 2007, 14.00-16.00

Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of beredenering.

---

1. Bereken de volgende limieten:

a. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^3 + 10x^2 + 6x - 18}{x^2 + 6x + 9}$. (5 pt)

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$. (5 pt)

c. $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^3 e^{2x} (\ln x)^6$. (5 pt)

2. Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a. $\sqrt[3]{\sin^2 x + 1}$. (5 pt)

b. $x^{\ln x}$. (5 pt)

3. Bepaal van de volgende functies een primitieve:

a. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$. (5 pt)

b. $(x^2 + x)e^{2x}$. (5 pt)

4. Onderzoek en teken de grafiek van de volgende functies. Betrek hierbij in elk geval de volgende kenmerken, indien van toepassing: de snijpunten met de assen, extreme waarden en tekenschema van de afgeleide, asymptoten en gedrag van de functie voor grote waarden van $|x|$ en rond discontinuïteiten.

a. $f(x) = xe^{-x^2+x}$. (10 pt)

b. $g(x) = \dfrac{6 + x - x^2}{x - 2}$. (10 pt)

Op de ommezijde staat een overzicht met formules die je mag gebruiken.

Goniometrie:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x);$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2};\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$

Standaardlimieten voor functies:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a;$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0;$

$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0, \quad \text{als } q > 0;$

Afgeleiden:

$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2};$

ANTWOORDEN.

1a. Tweemaal de regel van de l'Hôpital toepassen geeft:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+10x^2+6x-18}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{6x^2+20x+6}{2x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{12x+20}{2}=-8.$$

b. Invullen geeft $\infty-\infty$. We gebruiken de worteltruc:

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}-x}=-\frac{1}{2}.$$

De dominante termen in de teller en de noemer zijn x resp. $\sqrt{x^2}-x=-2x$.

c. $\lim\limits_{x\downarrow 0}\ x^3e^{2x}(\ln x)^6=\lim\limits_{x\downarrow 0}\ e^{2x}\lim\limits_{x\downarrow 0}\ x^3(\ln x)^6=1\cdot 0=0$. De tweede factor is het rechterlid is een standaardlimiet.

2a. De kettingregel toepassen op de samengestelde functie $x\to\sin x=u\to u^2+1=v\to\sqrt[3]{v}=y$ geeft

$$[\sqrt[3]{\sin^2 x+1}]'=[\sin x]'\cdot[u^2+1]'\cdot[v^{1/3}]'=\cos x\cdot 2u\cdot\frac{1}{3}v^{-2/3}=\frac{2\cos x\sin x}{3(\sin^2 x+1)^{2/3}}.$$

b. Schrijf $x^{\ln x}=e^{\ln^2 x}$. De kettingregel geeft dan

$$[e^{\ln^2 x}]'=e^{\ln^2 x}\cdot[\ln^2 x]'=\frac{2\ln x}{x}\cdot e^{\ln^2 x}=2\ln x\cdot x^{\ln x-1}.$$

3a. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-5}}\cdot[x^2+2x-5]'dx=\sqrt{x^2+2x-5}+C$. De integratieconstante mag worden weggelaten omdat slechts naar een enkele primitieve wordt gevraagd.

b. Herhaald partieel integreren geeft

$$\int(x^2+x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{2}\int(2x+1)e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}+\frac{1}{4}\int 2e^{2x}dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+C.$$

4a. Het enige snijpunt met de coördinaatassen is $(0,0)$. $f'(x) = (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2+x}$. Deze is nul voor $x = 1$ en $x = -1/2$. Het tekenschema van de afgeleide is $--$ $(-1/2)$ $++$ (1) $--$ en er is dus een minimum in $x = -1/2$ ter waarde $-\frac{1}{2}e^{-3/4}$ en een maximum in $x = 1$ ter waarde 1. Tenslotte is $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ dus voor $x \to \pm\infty$ is er een horizontale asymptoot $y = 0$. Met behulp van deze gegevens kan de grafiek worden getekend.

b. Snijpunten met de x-as zijn: $(-2,0)$ en $(3,0)$; met de y-as $(0,-3)$. Staartdelen geeft $g(x) = -x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$. De afgeleide is $g'(x) = -1 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$. Dus is $g'(x) < 0$ voor alle x (behalve $x = 2$). De functie is dus overal dalend. Er is een verticale asymptoot bij $x = 2$ (waar de noemer 0 is maar de teller niet, zodat $\lim_{x\to 2} g(x) = \pm\infty$). Tenslotte is

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) + x + 1 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$

dus er is een scheve asymptoot $y = -x - 1$ voor $x \to \pm\infty$. Met behulp van deze gegevens kan de grafiek worden getekend. (Merk nog op dat de grafiek puntsymmetrisch is t.o.v. het snijpunt van de asymptoten $(2,-3)$.)