

HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1

vrijdag 15 januari 2016, 14:00-16:00

- Vul op elk tentamenpapier **DUIDELIJK LEESBAAR** je naam en collegekaartnummer in.
 - Op de achterzijde staan drie opgaven.
 - Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Een eenvoudige wetenschappelijke calculator mag wel.
 - Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
 - Links in de marge staat het maximale aantal punten voor een opgave. Het cijfer is (aantal behaalde punten)/5.
-

5 1.a) Bereken $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi x) - 1}{(x - 1)^2}$.

5 b) Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 1}$.

5 2. Gegeven zijn twee positieve getallen x, y zodat $x^{10}y = 1$. Bepaal x, y zodat $x + y$ minimaal is.

3. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^5 + x - 1}{x^4 + 1}$.

4 a) Laat zien dat $f(x)$ een nulpunt heeft in $(0, 1)$. Ligt dit nulpunt in $(0, \frac{1}{2})$ of $[\frac{1}{2}, 1)$?

3 b) Laat zien dat $f(x)$ precies één (en dus niet meer dan één) nulpunt heeft in $\mathbb{R}$.

3 c) Bepaal de scheve asymptoten van $f(x)$ voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$.

- 5 4. De functie $f(x)$ is gegeven door

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(\cos(\tfrac{1}{6}\pi x))^2 & (x < 1), \\ f(x) &= {}^2\log(8x^2) & (1 < x < 2) \\ f(x) &= \sqrt[3]{x+25} & (x > 2). \end{aligned}$$

Heeft $f(x)$ een ophefbare discontinuïteit in $x = 1$ (dat wil zeggen, kan $f(1)$ zo worden gedefinieerd dat $f(x)$ continu wordt in $x = 1$)? Heeft $f(x)$ een ophefbare discontinuïteit in $x = 2$? Motiveer je antwoord.

5. Gegeven is de functie $f(x) = \sin x + \cos x$.

- 5 a) Bepaal het 2e Taylor-polynoom $P_{2,0}(x)$ van $f(x)$ rond $x = 0$.
 2 b) Geef de restterm $R_{2,0}(x)$.
 3 c) We willen $f(0,01)$ benaderen door $P_{2,0}(0,01)$. De fout die we daarbij maken is $R_{2,0}(0,01)$. Laat zien dat $|R_{2,0}(0,01)| < 10^{-6}$.

6. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2}$.

- 3 a) Bepaal het domein van $f(x)$. Bepaal de verticale asymptoot(en) van $f(x)$. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.
 2 b) Bepaal de horizontale asymptoten van $f(x)$ voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$.
 3 c) Bepaal voor welke waarden van x de functie $f(x)$ stijgend of dalend is. Bepaal ook de extremen van $f(x)$ met plaats (x -coördinaat), aard (maximum of minimum, absoluut of relatief) en grootte (y -coördinaat).
 2 d) Schets de grafiek van $f(x)$.

Formules goniometrie

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Standaardlimieten voor functies

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^q} = 0 \text{ als } q > 0.$$
