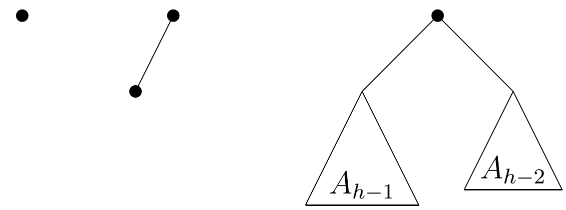
2) a. Voor het minimale aantal knopen in een AVL-boom, laat A_h een AVL-boom van hoogte h zijn met een minimaal aantal knopen en a_h dit aantal knopen. Dan geldt:



A_1 $\quad$ A_2 $\quad$ A_h

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_h = a_{h-1} + a_{h-2} + 1$$
$$h = 1 \qquad h = 2 \qquad h \geq 3$$

De recurrente betrekking voor a_h is dus $a_h = a_{h-1} + a_{h-2} + 1$ voor $h \geq 3$ met beginwaardes $a_1 = 1$ en $a_2 = 2$. Dit geeft de volgende waardes:

h	1	2	3	4	5	6
a_h	1	2	4	7	12	20
F_{h+2}	2	3	5	8	13	21

waarbij F_{h+2} het $(h+2)$-de Fibonacci getal is. Hieruit concluderen we dat $a_h = F_{h+2} - 1$ voor $h \geq 1$.

Deze laatste stap is natuurlijk geen formeel bewijs. Een heel bonuspunt (ja, ja, we zijn royaal) kan daarom verdiend worden met:

De betrekking $a_h = a_{h-1} + a_{h-2} + 1$ voor $h \geq 3$ met beginwaardes $a_1 = 1$ en $a_2 = 2$ komt overeen met $a_h + 1 = (a_{h-1} + 1) + (a_{h-2} + 1)$ voor $h \geq 3$ met beginwaardes $a_1 + 1 = 2$ en $a_2 + 1 = 3$. Voor $a'_h = a_h + 1$ geldt dus dezelfde recurrente betrekking als voor de Fibonacci getallen, terwijl $a'_1 = 2 = F_3$ en $a'_2 = 3 = F_4$. De getallen a'_h nemen dus dezelfde waardes aan als de Fibonacci getallen, alleen 'lopen ze twee voor': $a'_h = F_{h+2}$ voor $h \geq 1$. Dit betekent dat $a_h + 1 = F_{h+2}$, ofwel $a_h = F_{h+2} - 1$ voor $h \geq 1$.

Een AVL-boom van hoogte h met maximaal aantal knopen is gewoon een complete binaire boom van hoogte h. Voor $h = 1$ heeft zo'n boom 1 knoop, voor $h = 2$ heeft zo'n boom 3 knopen, voor $h = 3$ heeft zo'n boom 7 knopen. In het algemeen heeft een AVL-boom van hoogte h dus maximaal $2^h - 1$ knopen.

In dit geval volstaat dus een minder formeel bewijs dan in het vorige. De recurrente betrekking is hier niet direct nodig. Voor de liefhebbers:

De recurrente betrekking voor m_h, het maximale aantal knopen in een AVL-boom van hoogte h is: $m_h = 2m_{h-1} + 1$ voor $h \geq 2$ met beginwaarde $m_1 = 1$.

Stel we hebben een AVL-boom van hoogte h met n knopen. Dan volgt uit het voorgaande:

$$F_{h+2} - 1 \leq n \leq 2^h - 1$$

Met de benadering $F_h \approx \phi^h$ met $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ geeft dit

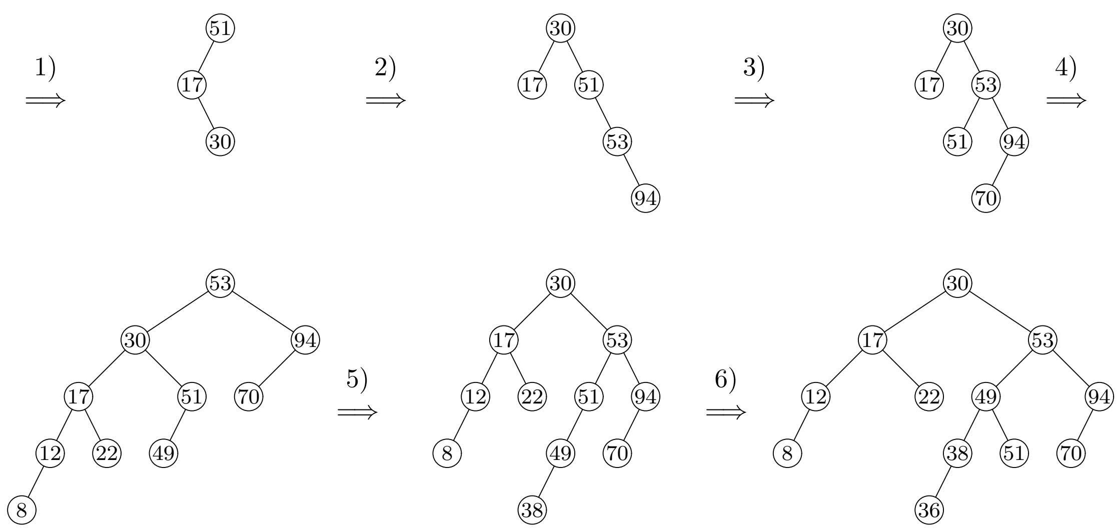
$$\phi^{h+2} - 1 \leq n \leq 2^h - 1 \Longleftrightarrow \phi^{h+2} \leq n + 1 \leq 2^h \Longleftrightarrow$$

$$h + 2 \leq {}^{\phi}\log(n+1) \wedge {}^{2}\log(n+1) \leq h \Longleftrightarrow$$

$$^{2}\log(n+1) \leq h \leq {}^{\phi}\log(n+1) - 2$$

Dit houdt in het bijzonder in dat de hoogte van een AVL-boom logaritmisch is in het aantal knopen.

b. We kunnen de opbouw van de AVL-boom als volgt grafisch beschrijven:

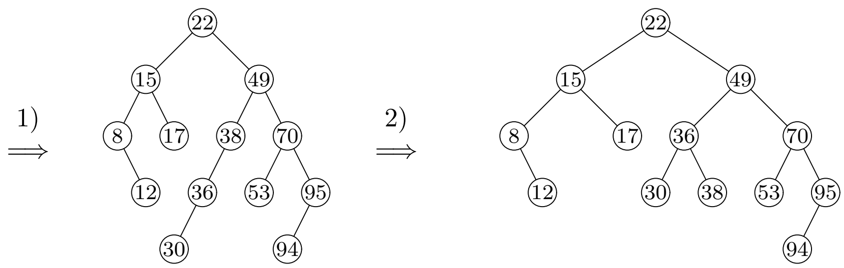


Hierbij betekent
1) voeg vanuit de lege boom achtereenvolgens 51, 17 en 30 toe;
2) er is disbalans bij knoop 51 (LR); voer een dubbele rotatie naar rechts uit rond deze knoop; voeg vervolgens 53 en 94 toe;
3) er is disbalans bij knoop 51 (RR); voer een enkele rotatie naar links uit rond deze knoop; voeg vervolgens 70 toe;
4) er is disbalans bij knoop 30 (RR); voer een enkele rotatie naar links uit rond deze knoop; voeg vervolgens 22, 49, 12 en 8 toe;
5) er is disbalans bij knoop 53 (LL); voer een enkele rotatie naar rechts uit rond deze knoop; voeg vervolgens 38 toe;
6) er is disbalans bij knoop 51 (LL); voer een enkele rotatie naar rechts uit rond deze knoop; voeg vervolgens 36 toe.
Deze laatste toevoeging geeft geen problemen: we hebben de gezochte AVL-boom.

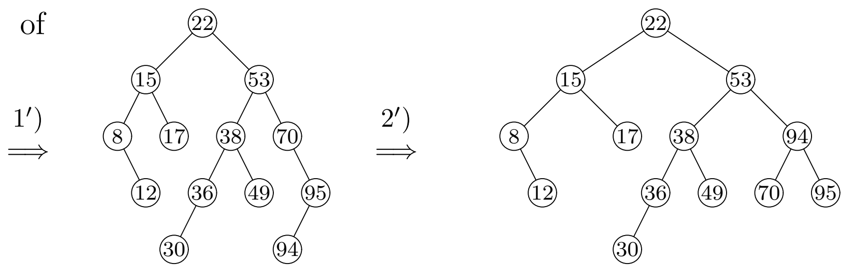
c. We kunnen 51 niet zomaar verwijderen, omdat het een interne knoop met twee kinderen is. Daarom verwisselen we hem eerst met zijn voorganger 49 in LWR-volgorde of met zijn opvolger 53 in diezelfde volgorde (beide mogelijkheden zijn goed). Vervolgens kunnen we 51 zonder problemen weghalen (hij heeft immers zelfs geen enkel kind meer).

Door deze actie wordt wel de AVL-structuur van de boom verstoord. Die moeten we dus herstellen. We moeten in principe op het hele pad van de verwijderde knoop naar de wortel (van onder naar boven dus) controleren of er disbalans is ontstaan. Waar dat zo is, moeten we roteren. Dit blijkt in dit geval op maar een plaats te moeten gebeuren.

Grafisch ziet het er allemaal als volgt uit:



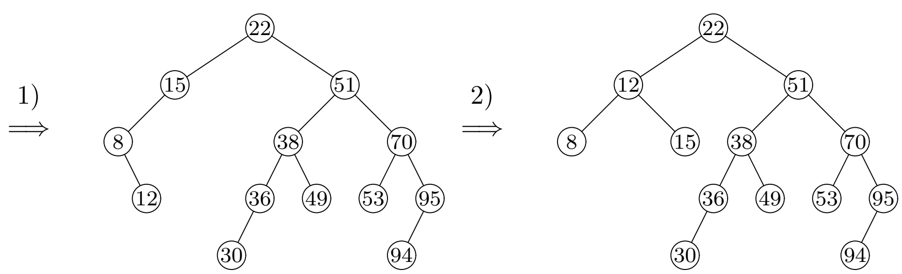
of

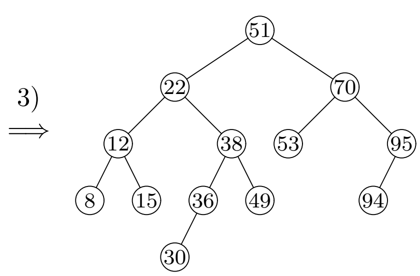


Hierbij betekent
1) verwissel 49 en 51; verwijder vervolgens 51;
2) er is disbalans bij knoop 38 (LL); voer een enkele rotatie naar rechts uit rond deze knoop;
1′) verwissel 51 en 53; verwijder vervolgens 51;
2′) er is disbalans bij knoop 70 (RL); voer een dubbele rotatie naar links uit rond deze knoop.
In beide gevallen resteert na de (enkele, dan wel dubbele) rotatie een AVL-boom.

Nu heeft de te verwijderen knoop 17 geen kinderen, zodat we hem onmiddellijk kunnen wegknippen.

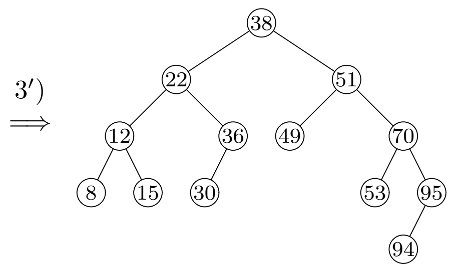
Ook dit verstoort de AVL-structuur echter. In dit geval blijkt op het complete resterende pad van de verwijderde knoop naar de wortel (alle twee de knopen) disbalans te ontstaan. We moeten dus twee keer roteren.





Hierbij betekent
1) verwijder 17;
2) er is disbalans bij knoop 15 (LR); voer een dubbele rotatie naar rechts uit rond deze knoop;
3) er is disbalans bij knoop 22 (RR); voer een enkele rotatie naar links uit rond deze knoop.
Het resultaat is inderdaad een AVL-boom.

Men zou op kunnen merken dat er in de middelste boom behalve RR-disbalans ook RL-disbalans is bij knoop 22. Om dat te verhelpen zou men, in plaats van de genoemde enkele rotatie,
3′) een dubbele rotatie naar links rond knoop 22
kunnen voorstellen. Wanneer we deze rotatie uitvoeren, krijgen we echter de volgende boom:



Dit is geen AVL-boom, want er is nu disbalans bij knoop 51 (RR). Dit antwoord zou dus fout zou zijn. Het heeft ook geen zin meer (wat de beoordeling betreft) om de AVL-structuur te herstellen met een enkele rotatie naar links rond knoop 51.

Een tweede bonuspunt kan worden verdiend door in de tekeningen van de bomen de balanswaarde (het verschil tussen de dieptes van de rechtersubboom en de linkersubboom van een knoop) bij iedere knoop te vermelden. Bij een AVL-boom zijn deze waardes natuurlijk altijd gelijk aan -1, 0 of 1.

Voor de drie onderdelen van deze opgave kunnen, exclusief bonuspunten, respectievelijk 9 (4+2+3), 9 en 7 (3+4) punten gehaald worden, totaal 25 dus.