Proeftentamen Digitale technieken

André Deutz

October 17, 2007

De opgaven kunnen uiteraard in willekeurige volgorde gemaakt worden – geef heel duidelijk aan op welke opgave een antwoord gegegeven wordt. Geef zoveel mogelijk uitleg voor je antwoorden. Schrijf je antwoorden op het uitgedeelde papier. *Succes!*

1 Representatie van data

1. Laat voor een getal G, $\text{Rep}_2(G)$=11011 gegeven zijn. Wat is $\text{Rep}_{10}(G)$?
   Antwoord: 1ste manier: $2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27$
   2de manier: $((((((1 \cdot 2) + 1) \cdot 2) + 0) \cdot 2) + 1) \cdot 2 + 1$ of te wel:
   $1 \cdot 2 = 2$
   $(2 + 1) \cdot 2 = 6$
   $(6 + 0) \cdot 2 = 12$
   $(12 + 1) \cdot 2 = 26$
   $26 + 1 = 27$

2. Laat voor een getal G, $\text{Rep}_{10}(G)$=$\frac{1}{3}$ gegeven zijn. Wat is $\text{Rep}_2(G)$?
   $\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$

$0.6666666\cdots$	=	$0.3333333 \cdot 2$	$\rightarrow$	0
$1.3333333\cdots$	=	$0.6666666 \cdot 2$	$\rightarrow$	1
$0.6666666\cdots$	=	$0.3333333 \cdot 2$	$\rightarrow$	0
$1.3333333\cdots$	=	$0.6666666 \cdot 2$	$\rightarrow$	1
$\cdots$	=	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$
$\cdots$	=	$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$

   Antwoord: $\text{Rep}_2(G) = 0.010101\cdots$

3. Beschouw het 4-bit two's complement systeem.
   (a) Wat is het bereik van het 4-bit two's complement systeem?
   Antwoord: Het bereik is $[-2^{4-1}, +2^{4-1} - 1]$ of te wel: [-8,+7].
   (b) Laat $\text{Rep}_{10}(G_1)= -4$ en $\text{Rep}_{10}(G_2)= -3$ zijn. Bereken $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_1 + G_2)$(dwz de 4-bit two's complement representatie van $G_1 + G_2$) door de optelling op $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_1)$=1100 en $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_2)$=1101 in het two's complement systeem uit te voeren.

carries	1	1				
		1	1	0	0	
+		1	1	0	1	
	1	1	0	0	1	

Answer: 1001 met een $\text{Carry}_{out} = 1$. Merk op: 1) carryIn naar MSB is gelijk aan carryOut vanuit MSB. 2) MSB van summanden is gelijk aan MSB van som. De opmerkingen zijn equivalent en de betekenis ervan is dat er geen overflow is.

(c) Dezelfde vraag als voorgaande met iets andere data: Laat $\text{Rep}_{10}(G_1) = -5$ en $\text{Rep}_{10}(G_2) = -4$ zijn. Bereken $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_1 + G_2)$(dwz de 4-bit two's complement representatie van $G_1 + G_2$) door de optelling op $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_1)$=1011 en $\text{Rep}_{twos\ 4}(G_2)$=1101 in het two's complement systeem uit te voeren. Interpreteer het verkregen resultaat. Beschrijf ook wat de Carry_{in} van het MSB (most significant bit) en de Carry_{out} van het MSB zijn.

Antwoord:

carries	1					
		1	1	0	0	: -4
+		1	0	1	1	: -5
	1	0	1	1	1	?

We krijgen als antwoord: 0111. Merk op dat in het algemeen geldt: als het signum bit van de summanden verschilt, dan is er geen overflow. In ons geval kunnen we voorspellen dat er overflow kan optreden. Merk op: 1) MSB van de summanden is hetzelfde maar verschilt van de MSB van de som en 2) de carryIn naar de MSB is 0 en verschilt van de carryOut vanuit de MSB. Interpretatie: er is overflow. (Dit zien we natuurlijk ook zonder de regel voor overflow (zie Assignment 2) toe te passen: -9 kan in het two's complement talstelsel niet geregistreerd worden, het bereik is [-8,+7]).

4. De meeste tegenwoordige digitale systemen zijn binair. Waarom wordt toch nog het hexadecimale talstelsel gebruikt?
Antwoord: Het hex talstelsel wordt gebruikt in de documentatie over digitale systemen (binaire strings kunnen met een simpele table look-up naar hex geconverteerd worden en hex strings zijn duidelijk wat overzichtelijker voor mensen).

5. (a) Geef de handigste manier aan waarmee een representatie van een getal in het talstelsel met radix 3 omgezet kan worden naar een representatie van het getal in het talstelsel met radix 9. In onze notatie luidt de opdracht als volgt: Laat voor een getal G, $\text{Rep}_3(G)$gegeven zijn. Bereken op de handigste manier $\text{Rep}_9(G)$.
Antwoord: Het handigst is om het de representatie met radix 3 in groepen van 2 digits op te splitsen en elke groep van twee volgens de volgende look-up tabel te vervangen:

ternair	negentallig
00	0
01	1
02	2
10	3
11	4
12	5
20	6
21	7
22	8

(b) Laat G een getal zijn met $\text{repr}_3(G)$=221122 (dwz de representatie van G in het talstelsel met met radix 3 is 221122). Wat is de representatie van dit getal in het talstelsel met radix 9.
Antwoord: $221122 = 22\ \ 11\ \ 22$ via look-up: $\text{Rep}_9(G) = 848$.

6. Laat de representatie van een getal G in het tientallig stelsel -4 zijn. Hoe ziet de representatie van G in het 81-bit two's complement systeem eruit? Antwoord: dit kunnen we doen door een simpele table-look-up:

$$\overbrace{1\ldots1}^{79\ bits,\ each\ is\ 1}11 \quad = -1_{10}$$

$$\overbrace{1\ldots1}^{79\ bits,\ each\ is\ 1}10 \quad = -2_{10}$$

$$\overbrace{1\ldots1}^{79\ bits,\ each\ is\ 1}01 \quad = -3_{10}$$

$$\overbrace{1\ldots1}^{79\ bits,\ each\ is\ 1}00 \quad = -4_{10}$$

2 TT's, LD's en BE's

1. Specificeer de volgende boolse functie met 4 inputs door middel van een waarheidstabel (1-0-tabel): de output van de functie is 1 dan en slechts dan als 3 of meer van de inputs 1 zijn.
Antwoord:

ABCD	Out
0000	0
0001	0
0010	0
0011	0
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	0
1001	0
1010	0
1011	1
1100	0
1101	1
1110	1
1111	1

2. Laat de boolse functie $F(A, B, C)$ gespecificeerd zijn door de volgende waarheidstabel (1-0-tabel):

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

   Construeer het logische diagram (LD) van deze boolse functie op de *standaard* manier.
   Antwoord:
   De *kanonieke* = *standaard* SoP voor deze functie is: $\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$

3 Vereenvoudiging en manipulatie van boolse uidrukkingen

1. Vereenvoudig de boolse uitdrukkingen voor de volgende boolse functies zonder gebruikmaking van Karnaugh diagrammen noch het Quine -McCluskey algoritme:

(a) $F(A,B,C) = \overline{A}\ \overline{B}CD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$
Antwoord:
$F(A,B,C) = \overline{A}\ \overline{B}CD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} =$
$\overline{A}CD(\overline{B}+B) + ACD(\overline{B}+B) + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$ (associativiteit, commutativiteit en distributiviteit)
$\overline{A}CD(\overline{B}+B)+ACD(\overline{B}+B)+\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} = \overline{A}CD\cdot 1+ACD\cdot 1+\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$ (1-stelling)
$\overline{A}CD\cdot 1 + ACD\cdot 1 + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} = \overline{A}CD + ACD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$ (commutativiteit en identiteit)
$\overline{A}CD + ACD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} = (\overline{A}+A)CD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$ (distributiviteit)
$(\overline{A}+A)CD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} = 1\cdot CD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$(1-stelling)
$1\cdot CD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} == CD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$ (identiteit)

(b) $H(A,B,C) = AC + B\overline{C} + AB$
Antwoord:
$H(A,B,C) = AC + B\overline{C} + AB = CA + \overline{C}B + AB$ (commutativiteit)
$CA + \overline{C}B + AB = CA + \overline{C}B$ (consensus)

(c) $G(A,B) = A(\ \overline{A} + B)$
Antwoord:
$G(A,B) = A(\ \overline{A} + B) = A\overline{A} + AB$ (distributiviteit)
$G(A,B) = A(\ \overline{A} + B) = A\overline{A} + AB = AB$ (0-stelling).

2. Bereken de PoS (Product-of-Sums) uitdrukking voor de volgende boolse funkties:

(a) $F(A,B,C) = \overline{A}\ \overline{B}CD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}$
Antwoord:
(Zie ook de tweede oplossing van Opgave 1.2.(b) van Assignment No 5.) Het handigst is om een SoP uit te rekenen voor $\overline{F}$. We gaan zelfs de kanonieke SoP voor $\overline{F}$ uitrekenen:

max term expression	input combination	minterm expression	F(A,B,C,D)
$M_0 = A+B+C+D$	0000	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	**1**
$M_1 = A+B+C+\overline{D}$	0001	$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	0
$M_2 = A+B+\overline{C}+D$	0010	$m_2 = \overline{A}\,\overline{B}C\,\overline{D}$	0
$M_3 = A+B+\overline{C}+\overline{D}$	0011	$m_3 = \overline{A}\,\overline{B}CD$	**1**
$M_4 = A+\overline{B}+C+D$	0100	$m_4 = \overline{A}B\,\overline{C}\,\overline{D}$	0
$M_5 = A+\overline{B}+C+\overline{D}$	0101	$m_5 = \overline{A}B\,\overline{C}D$	0
$M_6 = A+\overline{B}+\overline{C}+D$	0110	$m_6 = \overline{A}BC\overline{D}$	0
$M_7 = A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	0111	$m_7 = \overline{A}BCD$	**1**
$M_8 = \overline{A}+B+C+D$	1000	$m_8 = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	0
$M_9 = \overline{A}+B+C+\overline{D}$	1001	$m_9 = A\overline{B}\,\overline{C}D$	0
$M_{10} = \overline{A}+B+\overline{C}+D$	1010	$m_{10} = A\overline{B}C\,\overline{D}$	0
$M_{11} = \overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$	1011	$m_{11} = A\overline{B}CD$	**1**
$M_{12} = \overline{A}+\overline{B}+C+D$	1100	$m_{12} = AB\overline{C}\,\overline{D}$	0
$M_{13} = \overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	1101	$m_{13} = AB\overline{C}D$	0
$M_{14} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$	1110	$m_{14} = ABC\overline{D}$	0
$M_{15} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	1111	$m_{15} = ABCD$	**1**

Uit bovenstaande tabel kunnen we nu een SoP voor $\overline{F}$ aflezen (de som van mintermen waarbij in de output kolom een nul staat) (we krijgen een *kanonieke* SoP, maar we gebruiken het kanoniek zijn niet):

$$\overline{F} = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$$

Dus krijgen we voor

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{12} + m_{13} + m_{14}}$$

nu passen we DeMorgan toe:

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{m_1} \cdot \overline{m_2} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_6} \cdot \overline{m_8} \cdot \overline{m_9} \cdot \overline{m_{10}} \cdot \overline{m_{12}} \cdot \overline{m_{13}} \cdot \overline{m_{14}}$$

Op elk van de factoren passen we weer DeMorgan toe (als voorbeeld nemen we $\overline{m_1}$):

$$\overline{m_1} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} + \overline{D}$$

Verder is $\overline{\cdots}$ een involutie, dus krijgen we:

$$\overline{m_1} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} + \overline{D} = (A + B + C + \overline{D})$$

Met andere woorden

$$F = \overline{\overline{F}} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_8 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14}$$

(NB M_i zijn de maxtermen, zie voorgaande tabel. NB M_i and m_i zijn elkaars negatie.

(b) $H(A, B, C) = \overline{A}B + C$

i. Eerste manier:
$H(A, B, C) = \overline{A}B + C$
$\overline{A}B + C = C + \overline{A}B$ (commutativiteit)
$(C + \overline{A})(C + B)$ (distributiviteit)
Antwoord: $(C + \overline{A})(C + B)$ is een PoS (niet de kanonieke).

ii. Tweede manier: Beschouw de waarheidstabel van H.

ABC	$\overline{A}B$	$H(A, B, C)$
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	1	1
100	0	0
101	0	1
110	0	0
111	0	1

Dit betekent dat $H = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7$. Nu beschouwen we $\overline{H}$. We zien dus dat $\overline{H} = m_0 + m_4 + m_6$. Nu kunnen we de PoS van H berekenen: $H = \overline{\overline{H}} = \overline{m_0 + m_4 + m_6} = \overline{m_0} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_6} = M_0 \cdot M_4 \cdot M_6 = (A + B + C) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$

Below is a table which gives the expressions for the minterms and the maxterms for 3 variables:

minterm name	minterm expression	negation of minterm = maxterm expression	maxterm name
m_0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} = A + B + C$	M_0
m_1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}C} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{C} = A + B + \overline{C}$	M_1
m_2	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{\overline{A}B\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} + \overline{\overline{C}} = A + \overline{B} + C$	M_2
m_3	$\overline{A}BC$	$\overline{\overline{A}BC} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} + \overline{C} = A + \overline{B} + \overline{C}$	M_3
m_4	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A\overline{B}\,\overline{C}} = \overline{A} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} = \overline{A} + B + C$	M_4
m_5	$A\,\overline{B}C$	$\overline{A\overline{B}C} = \overline{A} + \overline{\overline{B}} + \overline{C} = \overline{A} + B + \overline{C}$	M_5
m_6	$AB\overline{C}$	$\overline{AB\overline{C}} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{\overline{C}} = \overline{A} + \overline{B} + C$	M_6
m_7	ABC	$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	M_7

Vervolgens zullen we ook verifiëren dat de twee manieren hetzelfde resultaat geven:

We gaan hiervoor de volgende identiteit gebruiken: $(d+e)(\overline{d}+e) = e$ (ga dit zelf na!)

1ste manier $= (A + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$
$(A + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$ (idempotentie)

$(B+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$ $\quad$ ($d = A$ and $e = B+C$ in the rule $(d+e)(\overline{d}+e) = e$)
$(B+C)(\overline{A}+C)$ $\quad$ ($d = B$ and $e = \overline{A}+C$ in the rule $(d+e)(\overline{d}+e) = e$)
en $(B+C)(\overline{A}+C)$ is gelijk aan de uitdrukking dmv 1ste manier.

3. Geef voor de boolse functie $G(A,B,C) = \overline{A}\ B + C$ de *standaard* SoP (Sum-of-Products) uitdrukking.
   Antwoord:

ABC	$\overline{A}B$	$G(A,B,C)$
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	1	1
100	0	0
101	0	1
110	0	0
111	0	1

   Dus is de *standaard* SoP is: $G = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_7 = \overline{A}\ \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$

4 Karnaugh diagrammen

Door gebruik te maken van het onderstaande Karnaugh diagram:

1. Teken de Karnaugh kaart (K-map) voor $f = \sum m(0,4,6,9,11,12,14,15)$
2. Identificeer de priem implicanten.
3. Identificeer de essentiele priem implicanten.
4. Vind een minimale uitdrukking voor f.

5 Combinational Logic Units (CLUs) of te wel Logische Schakelingen

1. Een CLU heeft twee 2-bit natuurlijke binaire inputs A en B. De eerste input A wordt gegeven door A_1 en A_0, waarbij A_1 de meest significante bit is. Soortgelijke opmerking geldt voor B: B wordt gegeven door B_1 en B_0, waarbij B_1 de meest signifacante bit (MSB=most significant bit) is. De CLU heeft drie outputs X, Y en Z. Het verband tussen de inputs A en B en de outputs X, Y en Z is als volgt.

	X	Y	Z
$A > B$	1	0	0
$A < B$	0	1	0
$A = B$	0	0	1

Ontwerp een CLU die deze functie implementeert via het volgende stappenplan.

(a) Construeer de waarheidstabel (truth table, 1-0-table) die overeenkomt met bovenstaande beschrijving.

A		B		$A > B$	$A < B$	$A = B$
A_1	A_0	B_1	B_0	X	Y	Z
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1

(b) Stel voor elk van de outputs X, Y en Z een boolse uitdrukking op.

(c) Vereenvoudig zoveel mogelijk elk van deze uitdrukkingen door gebruik te maken van de bijbehorende Karnaugh diagrammen.
$X = A_1\overline{B_1} + A_1A_0\overline{B_0} + A_0\overline{B_1}\ \overline{B_0}$
$Y = \overline{A_1}B_1 + \overline{A_1}\ \overline{A_0}B_0 + \overline{A_0}B_1B_0$
$Z = \overline{A_1}\ \overline{A_0}\ \overline{B_1}\ \overline{B_0} + \overline{A_1}A_0\ \overline{B_1}B_0 + A_1A_0B_1B_0 + A_1\ \overline{A_0}B_1\ \overline{B_0}$

(d) Teken het totale Logische Diagram (Logical Diagram (LD)) op onze standaard manier.

6 Varia

1. Hoeveel verschillende boolse functies met drie variabelen zijn er?
$2^{(2^3)}$. In het algemeen (n variabelen): $2^{(2^n)}$ (Beredeneer dit!).

2. Gegeven is dat er in Leiden precies 4 telefoons zijn. Zo ook in Den Haag. Construeer een logisch circuit die het mogelijk maakt drie kabels (van

Leiden naar Den Haag) te gebruiken waarmee elk van de 4 telefoons in Leiden een verbinding kan krijgen met elk van de 4 telefoons in Den Haag.

7 extra credit

Laat een set van drie (geklokte) D-flip-flops gegeven zijn. Construeer een circuit waarmee een 1-bit datum selectief naar één van de drie flip-flops gekopieerd kan worden.