TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 2
donderdag 13 januari 2005, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Opgave 1 [20 pt]
Laat $B = \{1\}\{0,1\}^*$. Elk woord $w \in B$ wordt opgevat als de binaire representatie van een positief natuurlijk getal. Voor $w \in B$ is $\texttt{bin}(w)$ het getal gerepresenteerd door w.

(a) Geef een reguliere expressie en een eindige automaat voor de taal
$L = \{w \in B \mid \texttt{bin}(w) \text{ is geen macht van } 2\}$.

(b) Geef een eindige automaat voor de taal
$K = \{w \in B \mid \texttt{bin}(w) \text{ is deelbaar door } 4\}$.

(c) Bekijk nu de equivalentierelatie I_K bepaald door de taal K uit het vorige onderdeel, die aangeeft welke paren woorden niet te onderscheiden zijn met betrekking tot K:
xI_Ky geldt als voor alle $z \in \{0,1\}^*$, $xz \in L$ dan en slechts dan als $yz \in L$.

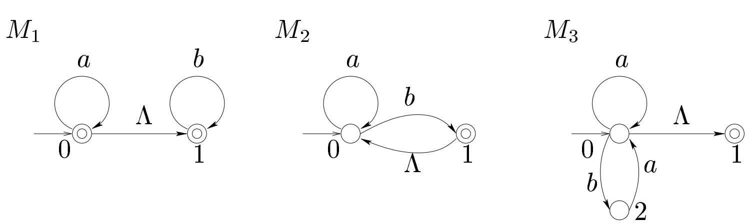
Laat zien dat alle woorden $w \in B$ zodat $\texttt{bin}(w)$ oneven is, ononderscheidbaar zijn m.b.t. K.

Geldt $u\, I_K\, v$ ook altijd als $\texttt{bin}(u)$ en $\texttt{bin}(v)$ allebei even zijn?
Waarom (niet)?

(d) Gebruik de eindige automaten gegeven voor L en K om met behulp van de productconstructie een eindige automaat te construeren voor
$\{w \in \{0,1\}^* \mid \texttt{bin}(w) \text{ is deelbaar door 4 en geen macht van } 2\}$.

NB: geef de gevraagde automaten d.m.v. hun transitiediagrammen;
let erop dat ze deterministisch en volledig gedefinieerd moeten zijn.

Opgave 2 [18 pt]
Gegeven zijn drie niet-deterministische automaten M_1, M_2 en M_3 met Λ-transities.



(a) Geef voor elk paar verschillende automaten M_i, M_j $(i \neq j)$ een woord x zodat $x \in L(M_i) - L(M_j)$.
Let op: er zijn dus 6 situaties $L(M_i) - L(M_j)$ te bekijken!

(b) Geef voor M_3 een NFA zonder Λ-transities die dezelfde taal accepteert door de volgende tabel in te vullen.

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$	$\delta(q,\Lambda)$	$\Lambda(\{q\})$	$\delta^*(q,a)$	$\delta^*(q,b)$
0						
1						
2						

Teken de resulterende NFA ook en geef daarbij begin- en eindtoestanden duidelijk aan.

Opgave 3 [`22 pt`]
Voor een willekeurige taal L over een alfabet Σ definiëren we twee talen:
$L_{\texttt{prefs}} = \{xy \mid x \in L \text{ en } y \in \Sigma^*\}$
bestaande uit alle woorden over Σ die een woord uit L als prefix hebben, en
$L_{1/2} = \{xy \mid x \in L \text{ en } y \in \Sigma^* \text{ en } |y| = |x|\}$
bestaande uit alle woorden over Σ waarvan de eerste helft een woord uit L is.

(a) Veronderstel dat L een taal is die herkend wordt door een eindige automaat. Laat nu zien dat $L_{\texttt{prefs}}$ ook regulier is.

(b) Formuleer het pomplemma voor reguliere talen.

(c) Gebruik het pomplemma om te bewijzen dat de taal
$K = \{0^i v \mid v \in \{0,1\}^* \text{ en } |v| = i \geq 0\}$
niet regulier is.

(d) Is $L_{1/2}$ altijd een reguliere taal als L dat is? Waarom (niet)?

Opgave 4 [`20 pt`]
We bekijken de context-vrije grammatica G gegeven door de volgende producties:
$S \to aS \mid aSb \mid AS \mid \Lambda \quad A \to aAa \mid b$.

(a) Laat zien dat de volgende woorden afgeleid kunnen worden in G:
$abb \quad bab \quad bba$

(b) Laat zien dat voor alle $k \geq 0$ geldt dat $S \Rightarrow^* a^k S$ en $S \Rightarrow^* a^k b S$.

(c) Laat zien dat $L(G) = \{a,b\}^*$ of geef een woord $w \in \{a,b\}^* - L(G)$.

(d) Bewijs dat G dubbelzinnig is.
Is $L(G)$ inherent dubbelzinnig? Waarom (niet)?

Opgave 5 [`20 pt`]
$\texttt{pal} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^r\}$ bestaat uit de palindromen over $\{a,b\}$.

(a) Geef een context-vrije grammatica die `pal` genereert.

(b) $L_{a,b} = \{xaybz \mid x,y,z \in \{a,b\}^* \text{ en } |x| = |z|\}$.
Geef een context-vrije grammatica voor $L_{a,b}$.

(c) Laat zien dat het complement van `pal` ook context-vrij is

(d) Bekijk de volgende beweringen:
(1) als L_1 en L_2 context-vrije talen zijn, dan ook $L_1 \cup L_2$;
(2) als L een context-vrije taal is, dan ook zijn complement.

Geef voor elke bewering aan of hij waar is of niet.
Beargumenteer het antwoord met een constructie of tegenvoorbeeld.

`einde tentamen`