TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
Vrijdag 26 januari 2007, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.

Opgave 1
Voor een woord $w \in \{a,b\}^*$ is $\texttt{diff}(w) = n_a(w) - n_b(w)$ het verschil tussen het aantal optredens van a en dat van b in w.
Dus $\texttt{diff}(\Lambda) = 0$, $\texttt{diff}(baa) = 1$ en $\texttt{diff}(baabb) = -1$.

(a) Geef een stapelautomaat voor de taal

$$L = \{ucvc \mid u,v \in \{a,b\}^* \text{ en } \texttt{diff}(u) = \texttt{diff}(v)\}$$

hierin is c een nieuw symbool; bijvoorbeeld $baabbcbc \in L$.

(b) Bekijk nu de taal

$$K = \{ucv \mid u,v \in \{a,b\}^* \text{ en } \texttt{diff}(u) > \texttt{diff}(v) \geq 0\}.$$

Geef een DPDA die K accepteert.

(c) Is er een DPDA die K accepteert met lege stapel?
Zo ja, geef er een; zo nee, leg uit waarom niet.

Opgave 2
De context-vrije grammatica G heeft startsymbool S, terminaal alfabet $\{a,b,c\}$ en producties $S \to aS \mid bAB \quad A \to aA \mid aB \quad B \to bBb \mid c$.

(a) Construeer volgens de 'top-down' benadering een PDA M die $L(G)$ accepteert met eindtoestanden.

(b) Geef een links-preferente afleiding in G voor het woord $baabcbc$.

(c) Voer in de PDA M van onderdeel (a) een succesvolle berekening uit voor het woord $baabcbc$. Dat wil zeggen, een berekening die leidt van $(q_0, baabcbc, Z_0)$ naar (q, Λ, α), waarbij q_0 de begintoestand, Z_0 het initiële stapelsymbool, q een eindtoestand en α een string van 0 of meer stapelsymbolen is.

(Als je bij onderdeel (a) geen antwoord hebt, mag je de berekening ook in een andere stapelautomaat voor $L(G)$ uitvoeren).

(d) Laat M een PDA zijn die een taal L met eindtoestanden accepteert. Beschrijf een algemene procedure om M over te voeren in een PDA M' die dezelfde taal L met lege stapel accepteert.

(e) De context-vrije grammatica G heeft een bijzondere eigenschap (die we hier niet verklappen). Deze eigenschap zorgt ervoor dat het gemakkelijk is om rechtstreeks vanuit G een PDA M' te construeren die $L(G)$ accepteert met lege stapel, èn die geen Λ-transities kent. Construeer (ad-hoc) zo'n PDA M'.

Opgave 3

(a) Geef een Turing machine M voor de partiële functie $f : \{1\}^* \to \{0,1\}^*$ zodat $f(\Lambda) = 0$, $f(1^n) = 1^k$ als $n = 2k+1$ voor een $k \geq 0$ en $f(1^n)$ is ongedefinieerd als $n = 2k$ voor een $k \geq 1$.

(b) Construeer een Turing machine T die precies alle unair gerepresenteerde getallen die '[een macht van 2] -1' zijn, accepteert.
Dus $L(T) = \{1^{2^k-1} \mid k \geq 0\}$.

Geef M en T door middel van hun toestandsdiagram en leg duidelijk uit hoe ze werken.

Opgave 4

(a) Wanneer heet een verzameling recursief en wanneer heet een verzameling recursief opsombaar?

(b) Laat T een Turing machine zijn die de karakteristieke functie voor een taal L berekent. Beschrijf een algemene procedure om T over te voeren in een Turing machine T' die de taal L accepteert.

Wat maakt het problematisch om de omgekeerde constructie uit te voeren, dat wil zeggen: om een Turing machine T' die een taal L accepteert over te voeren in een Turing machine T'' die de karakteristieke taal L berekent? En waarom maakt dit de omgekeerde constructie problematisch?

(c) Stel dat een taal L recursief opsombaar is, en dat ook zijn complement L' recursief opsombaar is. Toon aan dat L recursief is.

Opgave 5

(a) Laat P_1 en P_2 twee beslissingsproblemen zijn. Leg uit hoe je aantoont dat $P_1 \leq P_2$.

(b) Formuleer de stelling van Rice.

Bekijk nu de volgende drie beslissingsproblemen.

AcceptsAtLeast (AALK):
Gegeven een Turing machine T en een getal $k \geq 1$; accepteert T minstens k verschillende invoeren?

AcceptsLength1StepsK (AL1SK):
Gegeven een Turing machine T, en een getal $k \geq 1$; accepteert T minstens één invoer w van lengte 1 binnen k stappen?

AccepttsAtLeastKStepsK (AALKSK):
Gegeven een Turing machine T, en een getal $k \geq 1$; accepteert T minstens k verschillende invoeren binnen k stappen?

(c) Toon aan dat AALK onbeslisbaar is.
Hint: pas de stelling van Rice toe, direct of indirect.

(d) Is AL1SK beslisbaar? Motiveer je antwoord.

(e) Is AALKSK beslisbaar? Motiveer je antwoord.

`einde tentamen`