TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
vrijdag 7 maart 2008, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Per opgave staat de waardering steeds tussen [en] vermeld. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Opgave 1 [25 pt]
Bekijk de drie talen
$K = \{a^i b^j c^k \mid i \geq 1,\ j,k \geq 0 \text{ en } j+k = 2i\}$
$L_1 = \{a^i b^j \mid i \geq 1 \text{ en } 0 \leq j \leq 2i\}$
$L_2 = \{a^i b^j \mid i \geq 1 \text{ en } i \leq j \leq 2i\}$.

(a) Geef voor elk van de drie talen K, L_1, L_2 een stapelautomaat die die taal accepteert met lege stapel.

(b) Geef een accepterende berekening voor het woord ab^2 in elk van de drie bij a gegeven automaten.

(c) Leg voor elk van de drie talen K, L_1, L_2 duidelijk uit of die taal al dan niet door een DPDA met lege stapel kan worden geaccepteerd.

(d) Notatie: als L een taal is en $\#$ een symbool dat niet voorkomt in L, dan is $L[\#] = \{x\#y \mid x \in L \text{ en } xy \in L\}$.
Gegeven: als taal L een deterministische context-vrije taal is, dan ook $L[\#]$. Ook is gegeven dat $\{a^i b^i b^j \# b^k \mid i \geq 1 \text{ en } 0 \leq j+k \leq i\}$ niet context-vrij is.

Leg voor elk van de drie talen K, L_1, L_2 duidelijk uit of die taal al dan niet deterministisch context-vrij is, d.w.z al dan niet door een DPDA kan worden geaccepteerd.

Opgave 2 [15 pt]
Gegeven is de context-vrije grammatica G met startsymbool S, terminaal alfabet $\{a, b, \$\}$ en producties $S \to A\$ \quad A \to BC \mid \Lambda \quad B \to aB \mid \Lambda \quad C \to bA$.

(a) Geef voor elke productie de bijbehorende lookahead, d.w.z. geef aan bij welke terminalen (als volgend invoersymbool) de productie hoort.

(b) Laat zien dat G aan de LL(1) eigenschap voldoet.

(c) Gebruik de informatie uit de vorige onderdelen om een deterministische PDA voor G te construeren die als parser kan worden gebruikt voor G.

Opgave 3 [20 pt]
Construeer een Turingmachine T die de woorden over het alfabet $\{a, b, c\}$ intern sorteert. Dus T berekent de functie $\texttt{sort} : \{a, b, c\}^* \to \{a\}^*\{b\}^*\{c\}^*$ gedefinieerd door

$$\texttt{sort}(x) = a^{n_a(x)} b^{n_b(x)} c^{n_c(x)}$$

voor alle $x \in \{a, b, c\}^*$.

Geef T door middel van zijn toestandsdiagram en leg de gevolgde methode duidelijk uit.

Opgave 4 [20 pt]

(a) Wanneer wordt een taal recursief opsombaar genoemd?
En wanneer recursief?

(b) $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ is een eindige verzameling van n woorden over een zeker alfabet Σ. Laat zien dat L recursief is.

(c) Laat zien dat $L(T)$, de taal van Turingmachine T, recursief is als:
voor geen enkel invoerwoord x de berekening van T vanuit de beginconfiguratie $(q_0, \underline{\Delta}x)$ eeuwig doorgaat; dus elke berekening van T stopt (succesvol of door crashen).
(Hierbij mag je ervanuit gaan dat de TM de meest rechtse niet-lege cel op zijn band kan vinden.)

(d) Waar of niet waar:
Als Turingmachine T eindig veel invoerwoorden heeft waarvoor zijn berekening eeuwig doorgaat, dan is $L(T)$ recursief.
Leg uit in één zin!

Opgave 5 [20 pt]

(a) Laat P_1 en P_2 twee beslissingsproblemen zijn.
Wanneer zeggen we dat P_1 naar P_2 reduceert ($P_1 \leq P_2$)?

Post's Correspondence Problem (PCP) :
Gegeven een alfabet Σ, een natuurlijk getal $n \geq 1$ en een rij paren $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$, $\ldots$,(α_n, β_n) met $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*$ voor alle $1 \leq i \leq n$, bestaan er een of meer indices $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2 \ldots n\}$ zodat $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} = \beta_{i_1}\beta_{i_2} \cdots \beta_{i_k}$?

(b) Geef context-vrije grammatica's G_α en G_β verkregen uit een instantie van PCP als boven beschreven met de eigenschap dat $L(G_\alpha) \cap L(G_\beta) = \emptyset$ dan en slechts dan als de bewuste instantie een "ja-instantie" van PCP is.

(c) Gegeven is dat PCP onbeslisbaar is.
Laat zien dat het onbeslisbaar is of twee context-vrije grammatica's al dan niet een zelfde woord kunnen genereren (het lege-doorsnede probleem voor context-vrije grammatica's).

(d) Bekijk nu het oneindige-doorsnede probleem voor context-vrije grammatica's, CFG-IFI:
Gegeven twee context-vrije grammatica's G_1 en G_2, is $L(G_1) \cap L(G_2)$ oneindig?

Is CFG-IFI beslisbaar of onbeslisbaar?
Waarom denk je dat?

`einde tentamen`