TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
vrijdag 25 januari 2008, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven die allemaal evenveel waard zijn.

Opgave 1
Laat $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x)\} \cup \{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(x) \geq n_c(x)\}$ de taal zijn die bestaat uit die woorden over het alfabet $\{a,b,c\}$, waarin het aantal a's niet kleiner is dan zowel het aantal b's als het aantal c's.

(a) Geef een stapelautomaat die L accepteert.
Noem deze automaat M.

(b) Geef accepterende berekeningen van M voor de invoerwoorden ba en $babc$.

(c) Is M deterministisch? Laat zien waarom (niet).

(d) Bestaat er een DPDA die L accepteert met lege stapel?
Beargumenteer het antwoord.

(e) Gegeven is dat $K = \{a^i b^j c^k \mid i < j \text{ en } i < k\}$ geen context-vrije taal is.
Laat nu zien dat L geen deterministische context-vrije taal is.
(Er mag zonder bewijs verwezen worden naar bekende afsluitingseigenschappen.)

Opgave 2
Gegeven is de context-vrije grammatica G met startsymbool S, terminaal alfabet $\{a,b,\$\}$ en producties $S \to T\$ \quad T \to TX \mid ab \mid \Lambda \quad X \to bXaa \mid ba$.

(a) Elimineer de links-recursie in G zonder de gegenereerde taal te veranderen.

(b) Pas factorisatie toe op de producties $X \to bXaa$ en $X \to ba$.

De grammatica geconstrueerd bij de vorige onderdelen door eliminatie van links-recursie en factorisatie noemen we H.

(c) Geef voor elk van de producties van H de bijbehorende lookahead
(de verzameling terminale symbolen die als volgend invoersymbool bij een productie horen).

(d) Gebruik onderdeel c om na te gaan of H aan de LL(1) eigenschap voldoet.

Opgave 3
Gevraagd wordt een Turingmachine T met invoeralfabet $\{0,1\}$ die de functie $f(n) = n - 2$ berekent voor binair gerepresenteerde natuurlijke getallen n.

Dus voor elke $n \geq 2$ moet gelden

$$(q_0, \underline{\Delta}\mathtt{bin}(n)) \vdash_T^* (h_a, \underline{\Delta}\mathtt{bin}(n-2))$$

waarbij $\mathtt{bin}(k) \in \{0,1\}^*$ de binaire representatie is van het natuurlijke getal k zonder overbodige leidende nullen.

Let op dat T geen uitvoer mag opleveren bij invoer van de lege string, strings die met 0 beginnen en ook niet voor 1. Ook uitvoerstrings mogen geen leidende nullen hebben.

Geef T door middel van zijn toestandsdiagram en leg de gevolgde methode duidelijk uit.

Opgave 4

(a) Wanneer wordt een taal recursief opsombaar genoemd?
En wanneer recursief?

(b) Bewijs een van de volgende twee stellingen en geef voor de ander een tegenvoorbeeld.
Elke taal die recursief is, is ook recursief opsombaar.
Elke taal die recursief opsombaar is, is ook recursief.

Bekijk $K = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = 2^k \text{ voor een } k \geq 0\}$.

(c) Geef een unrestricted (type 0) grammatica die K genereert.

(d) Is K recursief, recursief opsombaar, allebei of geen van beide? Leg uit!

Opgave 5

(a) Formuleer de stelling van Rice.

Bekijk de volgende twee beslissingsproblemen.

AcceptsNothing:
Gegeven Turingmachine T; is $L(T) = \emptyset$?

EmptyIntersection:
Gegeven twee Turingmachines T_1 en T_2; is $L(T_1) \cap L(T_2) = \emptyset$?

[NB In het onderstaande mag gebruik gemaakt worden van het volgende resultaat: Als twee talen elk worden geaccepteerd door een gegeven TM, dan kan een TM worden geconstrueerd die hun doorsnijding accepteert.]

(b) Toon aan dat AcceptsNothing naar EmptyIntersection reduceert.

(c) Toon aan dat EmptyIntersection naar AcceptsNothing reduceert.

(d) Gebruik de stelling van Rice om te bewijzen dat beide problemen onbeslisbaar zijn.

`einde tentamen`