HERTENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA
vrijdag 3 augustus 2001, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Opgave 1 [14 pt]
De taal L wordt als volgt recursief gedefinieerd:
(*i*) $a \in L$, $b \in L$,
(*ii*) als $x \in L$, dan $ax \in L$ en $xbb \in L$,
(*iii*) L bevat geen andere woorden.

(a) Gebruik de definitie van L om aan te tonen dat de volgende woorden elementen van L zijn: aa bbb $abbb$ $abbbb$.

(b) Beargumenteer dat de volgende woorden géén element van L zijn:
λ ba bb $bbbb$.

(c) Bewijs met inductie naar de definitie van L dat $L \subseteq a^*b^*$.

(d) Geef L, zonder bewijs.

Opgave 2 [18 pt]
De functie $g : \{a\}^* \to \{a\}^*$ wordt gegeven door, voor alle $i \geq 0$,

$$g(a^i) = a^n \text{ met } n = \sum_{j=0}^{i} j.$$

(a) Bepaal $g(\lambda)$ $g(a)$ $g(aa)$ $g(aaa)$.

(b) Maak een DTM M die g berekent. Geef M d.m.v. zijn toestandsdiagram en schets het idee achter de constructie.

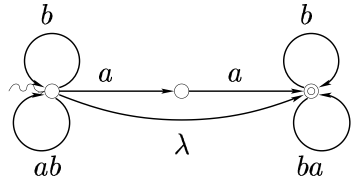
(c) Geef de configuratierijen horend bij de berekeningen die M uitvoert bij invoer van λ a aa.
Vergelijk de resultaten met de uitkomsten bij onderdeel (a).

Opgave 3 [8 pt]

(a) Neem aan dat M_1 een DTM is die voor geen enkel invoerwoord een oneindige berekening heeft. Dus voor elk invoerwoord x zal de berekening van M_1 op x na eindige tijd (succesvol) stoppen of gaan hangen.
Beschrijf hoe je uit M_1 een DTM M_2 kan construeren die het complement van $L(M_1)$ accepteert, ofwel $L(M_2) = \Sigma^* - L(M_1)$, waarbij Σ het invoeralfabet van zowel M_1 als M_2 is.

(b) Is $L(M_1)$ uit onderdeel (a) een taal uit $\mathcal{L}_{REC}$? Waarom (niet)?

Opgave 4 [8 pt]



Gegeven is de *lazy* FA M als hiernaast getekend.

(a) Construeer uit M een equivalente λ-NFA en daaruit vervolgens een NFA die equivalent is met M.

(b) Gebruik de subset constructie om van de NFA geconstrueerd bij het vorige onderdeel een equivalente DFA te maken.

Opgave 5 [20 pt]

(a) Geef CFG's G', G'' en G_1 zodat
$L(G') = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i < j\}$,
$L(G'') = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i > j\}$ en
$L(G_1) = L(G') \cup L(G'') = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i \neq j\}$.

(b) Geef CFG's G_2, G_3 en G zodat
$L(G_2) = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } j \neq k\}$,
$L(G_3) = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i \neq k\}$, en
$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \cup L(G_3) = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } (i \neq j \text{ of } j \neq k \text{ of } i \neq k)\}$.

(c) Geef een CFG H zodat $L(H) = \{a,b,c\}^* - \{a\}^*\{b\}^*\{c\}^*$.

(d) Wanneer noemen we een familie van talen gesloten onder complement?

(e) Is $\mathcal{L}_{CF}$, de familie van context-vrije talen, gesloten onder complement? Waarom (niet)? Gebruik eventueel de vorige onderdelen en het feit dat de taal $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_{CF}$.

Opgave 6 [15 pt]
Gegeven is de CFG G met startsymbool S en producties
$S \to AB|BA \quad A \to XAX|a \quad B \to XBX|b \quad X \to a|b$

(a) Geef voor de woorden ab en $abba$ een afleiding in G met bijbehorende afleidingsboom.

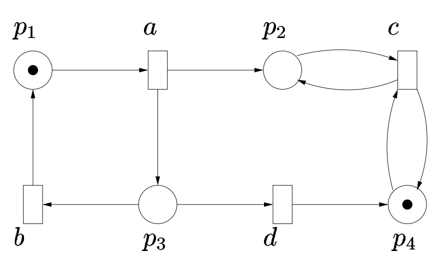
(b) Wanneer wordt een context-vrije grammatica dubbelzinnig genoemd? Laat zien dat G dubbelzinnig is.

(c) Bewijs met inductie naar n, de lengte van de afleiding, dat voor alle $n \geq 1$ geldt: als $S \Rightarrow^n x$, dan is $|x|$ even.

(d) Zijn volgende woorden zinsvormen van G? Waarom (niet)?
$\lambda \quad XXAXXXBX \quad XbXXXbXX$

(e) Geef L(G), zonder bewijs.

Opgave 7 [17 pt]
Gegeven is het gemarkeerde net (N, M) als hieronder getekend.
N:



(a) Geef vier vuurrijen uit $\mathbf{FS}(N, M)$ met de markeringen waar ze heen leiden.

(b) Gebruik (een gedeelte van) de markeringsgraaf $\mathbf{MG}(N, M)$ om na te gaan of (N, M) safe begrensd deadlock-vrij levend is.

(c) Laat zien dat de markering M' gegeven door $M'(p_1) = 0$, $M'(p_2) = 2$ en $M'(p_3) = M'(p_4) = 1$ een bereikbare markering is.

(d) Welke transities hebben concessie in M', de markering gegeven in onderdeel (c)? Welke transities zijn in conflict en welke hebben concurrent concessie in M'?

---

einde tentamen

HERTENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA UITWERKINGEN

vrijdag 3 augustus 2001, 14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

(a) Volgens (i) is $a \in L$ en uit (ii) volgt dan dat $a \cdot a \in L$.
Volgens (i) is $b \in L$ en uit (ii) volgt dan dat $b \cdot bb \in L$.
Volgens (i) is $b \in L$ en uit (ii) volgt dan dat $a \cdot b \in L$ en vervolgens dat $ab \cdot bb \in L$. (Of: volgens (i) is $b \in L$, uit (ii) volgt dan dat $b \cdot bb \in L$ en vervolgens dat $a \cdot bbb \in L$.)
Volgens (i) is $a \in L$ en uit (ii) volgt dat $a \cdot bb \in L$ en dan dat $abb \cdot bb \in L$.

(b) Volgens (iii) bevat L geen andere woorden dan die beschreven in (i) en (ii). Geen van de woorden λ, ba, bb en $bbbb$ wordt genoemd in onderdeel (i) van de definitie van L. Om te laten zien dat deze woorden geen elementen van L zijn, is het dus voldoende om te laten zien dat ze niet m.b.v. (ii) geconstrueerd kunnen worden.
$\lambda \notin L$, want elk woord geconstrueerd volgens (ii) begint met een a of eindigt op bb en is dus niet leeg.
$ba \notin L$, want elk woord geconstrueerd volgens (ii) begint met een a of eindigt op bb.
$bb \notin L$. Omdat bb niet begint met een a zou bb gemaakt moeten worden door twee b's toe te voegen aan een woord in L. Dat woord kan alleen maar λ zijn, maar we hebben al gezien dat λ geen woord uit L is en dus is ook bb niet in L.
$bbbb \notin L$. Omdat $bbbb$ niet begint met een a zou $bbbb$ gemaakt moeten worden door twee b's toe te voegen aan een woord in L. Dat woord kan alleen maar bb zijn, maar we hebben al gezien dat bb geen woord uit L is en dus is ook $bbbb$ niet in L.

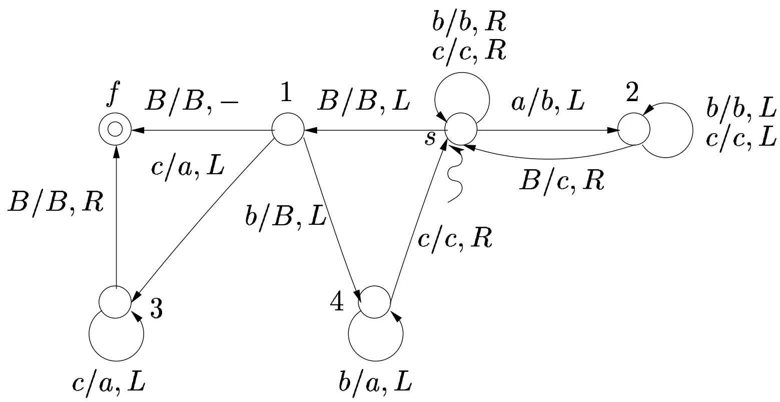
(c) De woorden a en b uit (i) zijn beide element van a^*b^*. Neem nu aan dat $x \in a^*b^*$, ofwel $x = a^ib^j$ voor zekere $i, j \geq 0$, en pas de constructie uit (ii) toe op x. Dat geeft $ax = a^{i+1}b^j \in a^*b^*$ en $xbb = a^ib^{j+2} \in a^*b^*$. Dus door (ii) toe te passen op woorden uit a^*b^* krijg je weer woorden uit a^*b^*. Omdat volgens (iii) alle woorden van L m.b.v. (ii) uit a en b gemaakt worden, volgt nu dat elk woord van L ook een woord uit a^*b^* is. Dus $L \subseteq a^*b^*$.

(d) L bestaat uit woorden die een a of een b bevatten en dat symbool wordt voorafgegaan door nul of meer a's en wordt gevolgd door een even aantal b's. Dus $L = \{a^ib^j \mid i, j \geq 0 \text{ en als } i = 0, \text{ dan is } j \text{ oneven}\} = a^+b^* \cup \{b^{2k+1} \mid k \geq 0\}$.

Opgave 2

(a) $g(\lambda) = a^0 = \lambda$, $g(a) = a^0a^1 = a$, $g(aa) = a^0a^1a^2 = a^3$, $g(aaa) = a^0a^1a^2a^3 = a^6$.

(b) Idee: Van links naar rechts wordt steeds nadat een a gelezen is, deze a veranderd in een b en wordt (links) vooraan een c bijgeschreven. Als alle a's zo zijn behandeld, dan wordt de laatste (meest rechtse) b verwijderd en vervolgens worden de overige b's weer in a's veranderd. Deze twee stappen worden herhaald totdat de laatste b is verwijderd, d.w.z. dat er rechts van de c's een B gelezen wordt. Tenslotte worden alle c's veranderd in a's en wordt de leeskop op de eerste a gezet. Als het invoerwoord oorspronkelijk $a^0 = \lambda$ was, dan reageert de DTM zoals wanneer de laatste b verwijderd is: de kop doet een stap naar links, er blijken geen c's te zijn en de berekening stopt.



(c) $s \vdash 1 \vdash f$, dus uitvoer λ.
$sa \vdash 2Bb \vdash csb \vdash cbs \vdash c1b \vdash 4c \vdash cs \vdash 1c \vdash 3Ba \vdash fa$, dus uitvoer a.
$saa \vdash 2Bba \vdash csba \vdash cbsa \vdash c2bb \vdash 2cbb \vdash 2Bcbb \vdash cscbb \vdash ccsbb \vdash ccbsb \vdash ccbbs \vdash ccb1b \vdash cc4b \vdash c4ca \vdash ccsa \vdash c2cb \vdash 2ccb \vdash 2Bccb \vdash csccb \vdash ccscb \vdash cccsb \vdash cccbs \vdash ccc1b \vdash cc4c \vdash cccs \vdash cc1c \vdash c3ca \vdash 3caa \vdash 3Baaa \vdash faaa$, dus uitvoer aaa.
De uitvoer komt overeen met de uitkomsten bij onderdeel (a).

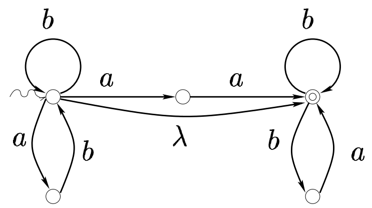
Opgave 3

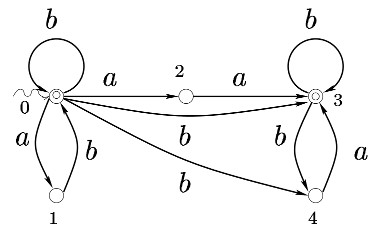
(a) Omdat M_1 voor geen enkel invoerwoord een oneindige berekening heeft bestaat het complement van $L(M_1)$ precies uit alle woorden over het invoeralfabet Σ waarop de berekening van M_1 gaat hangen. M_1 hangt als er in een toestand een symbool wordt gelezen waarvoor in die toestand geen instructie is. We passen M_1 als volgt aan.
De oude eindtoestand wordt een gewone toestand zonder instructies, dus alle berekeningen die eerst in die toestand succesvol stopten gaan daar nu hangen. Verder komt er een nieuwe eindtoestand f_2. Voor elke combinatie van een toestand q en een symbool x waarvoor M_1 geen instructie heeft krijgt M_2 een instructie $(q, x, f_2, x, -)$. Kortom, alle berekeningen die hangen in M_1 zullen nu succesvol stoppen in de nieuw toegevoegde eindtoestand f_2.

(b) $L(M_1) \in \mathcal{L}_{REC}$, want zowel $L(M_1)$ als zijn complement zitten in $\mathcal{L}_{DTM}$. Immers, $\mathcal{L}_{REC} = \{L \in \mathcal{L}_{DTM} \mid \overline{L} \in \mathcal{L}_{DTM}\}$, met $\overline{L}$ het complement van L.
Meer constructief en direct kan je ook opmerken dat uit M_1 een beslisser geconstrueerd kan worden met $L(M_1)$ als zijn ja-taal. Cruciaal is dat de berekeningen van M_1 altijd eindigen. Succesvol stoppen in M_1 leidt in de beslisser tot stoppen met een **y** op de band en hangen in M_1 leidt tot stoppen met een **n** op de band. (Bedenk wel dat de band ook nog leeg moet worden gemaakt op het symbool **y** of **n** na.)

Opgave 4

(a) Links staat een met M equivalente λ-NFA, verkregen door de transities voor woorden van lengte groter dan 1 op te breken in transities per letter. Rechts staat de uit deze λ-NFA geconstrueerde equivalente NFA. Toestand 0 is eindtoestand geworden, omdat vanuit 0 de eindtoestand, 3 bereikbaar was met een λ-tak. Verder is voor het pad $(0, \lambda, 3)(3, b, 3)$ een tak $(0, b, 3)$ gekomen en voor $(0, \lambda, 3)(3, b, 4)$ een tak $(0, b, 4.)$. Daarna is de λ-tak verwijderd.

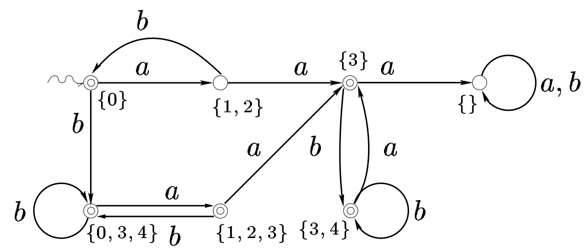




(b) In de tabel staan de transitierelatie van de NFA en de transitiefunctie van de daaruit m.b.v. de subsetconstructie gemaakte DFA. (De lege verzameling is weergegeven als {}.)

NFA	a	b	DFA	a	b
0	1, 2	0, 3, 4	$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{0,3,4\}$
1	—	0	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\{0\}$
2	3	—	$\{0,3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,3,4\}$
3	—	3, 4	$\{3\}$	$\{\}$	$\{3,4\}$
4	3	—	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$	$\{0,3,4\}$
			$\{3,4\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$
			$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

$\{0\}$ is de begintoestand van de DFA; eindtoestanden zijn $\{0\}$, $\{0,3,4\}$, $\{3\}$, $\{1,2,3\}$ en $\{3,4\}$, omdat deze verzamelingen 0 of 3, dus een eindtoestand van de NFA, bevatten. Het toestandsdiagram van de DFA:



Opgave 5

(a) G' heeft startsymbool S' en producties:
$S' \to B_1C \quad B_1 \to aB_1b|B_1b|b$ (meer b's dan a's) $\quad C \to Cc|\lambda$;
G'' heeft startsymbool S'' en producties:
$S'' \to A_1C \quad A_1 \to aA_1b|aA_1|a$ (meer a's dan b's) $\quad C \to Cc|\lambda$.
G_1 moet de vereniging van $L(G')$ en $L(G'')$ genereren. G_1 krijgt een nieuw startsymbool S_1 met producties $S_1 \to S'|S''$ en verder alle producties van G_1 en G_2. Dit gaat goed omdat de enige gemeenschappelijke niet-terminaal van G' en G'' in de twee grammatica's precies dezelfde producties heeft. De producties van G_1 zijn dus: $S_1 \to S'|S''$ en
$S' \to B_1C \quad S'' \to A_1C \quad C \to Cc|\lambda \quad B_1 \to aB_1b|B_1b|b \quad A_1 \to aA_1b|aA_1|a$.

(b) $L(G_2)$ is net als $L(G_1)$ op te vatten als een vereniging van twee talen:
$L(G_2) = \{a^ib^jc^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } j < k\} \cup \{a^ib^jc^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } j > k\}$.
G_2 heeft axioma S_2 en producties: $S_2 \to T|T'$ en
$T \to AC_2 \quad T' \to AB_2 \quad A \to aA|\lambda \quad C_2 \to bC_2c|C_2c|c \quad B_2 \to bB_2c|bB_2|b$.
Ook $L(G_3)$ is een vereniging:
$L(G_3) = \{a^ib^jc^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i < k\} \cup \{a^ib^jc^k \mid i,j,k \geq 0 \text{ en } i > k\}$.
G_3 heeft axioma S_3 en producties: $S_3 \to U|U'$ en
$U \to aUc|Uc|Bc \quad U' \to aU'c|aU'|aB \quad B \to Bb|\lambda$.
$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) \cup L(G_3)$.
G krijgt een nieuw startsymbool X met producties $X \to S_1|S_2|S_3$ en verder alle producties van G_1, G_2 en G_3 (dat gaat weer goed doordat de producties van de verschillende niet-terminalen niet door elkaar kunnen gaan lopen).

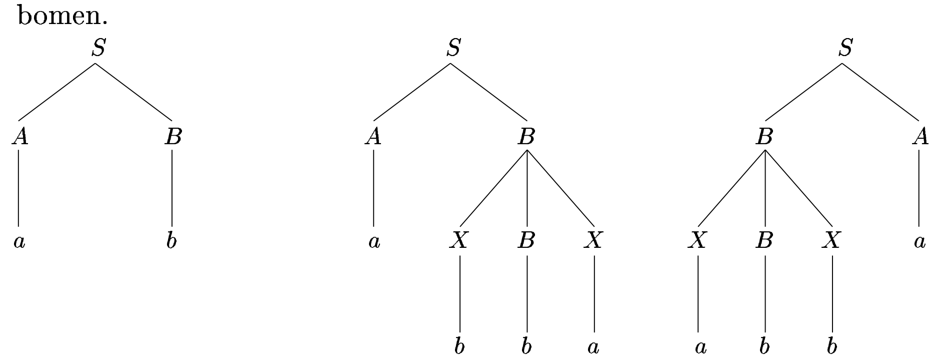
(c) H moet de taal genereren die uit alle woorden over $\{a, b, c\}$ bestaat die de letters a, b en c niet in de goede volgorde hebben staan. Zo'n woord heeft dus ergens een b of c voor een a staan (optreden van ba of ca) of ergens een c voor een b staan (optreden van cb). H krijgt startsymbool Y en producties
$Y \to ZVZ \quad Z \to aZ|bZ|cZ|\lambda \quad V \to ba|ca|cb$.

(d) Een familie van talen is gesloten onder complement als voor elke taal uit de taalfamilie geldt dat ook zijn complement in de taalfamilie zit.

(e) We gebruiken het feit dat de taal $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_{CF}$. De grammatica G uit onderdeel (b) genereert alle woorden over $\{a, b, c\}$ waarin de letters a, b en c in alfabetische volgorde staan maar de aantallen a's, b's en c's niet alledrie gelijk zijn. De grammatica H uit onderdeel (c) genereert alle woorden over $\{a, b, c\}$ die de letters a, b en c niet in de goede volgorde hebben staan. Dus $L(G) \cup L(H) = \{a, b, c\}^* - L$, het complement van L. Dat deze taal context-vrij is, volgt uit het feit dat we daar nu eenvoudig een CFG voor kunnen maken: axioma Q en producties $Q \to X|Y$ en verder de producties van G en H. Dus $\{a, b, c\}^* - L \in \mathcal{L}_{CF}$ terwijl zijn complement $L \notin \mathcal{L}_{CF}$. Conclusie: $\mathcal{L}_{CF}$ is niet gesloten onder complement.

Opgave 6

(a) $S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow ab$, de linkerafleidingsboom;
$S \Rightarrow AB \Rightarrow AXBX \Rightarrow aXBX \Rightarrow abBX \Rightarrow abbX \Rightarrow abba$ met twee afleidingsbomen.



(b) Een CFG G heet dubbelzinnig als er een woord $w \in L(G)$ is waarvoor twee of meer verschillende afleidingsbomen bestaan. G is dubbelzinnig, want hierboven staan twee verschillende afleidingsbomen voor het woord $abba \in L(G)$.

(c) Basis: $n = 1$ dus $S \Rightarrow^1 x$. Dan $x = AB$ of $x = BA$ en inderdaad $|AB| = |BA| = 2$ en dus even.
Inductiehypothese: voor zekere $k \geq 1$ geldt: als $S \Rightarrow^k x$, dan is $|x|$ even.
Inductiestap: laat nu $S \Rightarrow^{k+1} x$. Dan is er een zinsvorm y zodat $S \Rightarrow^k y \Rightarrow^1 x$. Uit de inductiehypothese volgt dat $|y|$ even is. Merk nu op dat x uit y is ontstaan door het toepassen van één productie van G. Bovendien weten we dat $k \geq 1$ en dat het startsymbool S niet aan de rechterkant van producties uit G voorkomt. Dit betekent dat x uit y is ontstaan door het toepassen van één van de producties $A \to XAX$, $A \to a$, $B \to XBX$, $B \to b$, $X \to a$, of $X \to b$. In elk van deze 6 gevallen geldt dat een letter vervangen wordt door een woord van oneven lengte. Dat wil zeggen dat er in het te herschrijven woord een even aantal letters bijkomen. Omdat $|y|$ even is, is dus $|x|$ ook even.

(d) λ is geen zinsvorm van G omdat G geen λ-producties heeft en dus tijdens een afleiding de zinsvormen nooit korter dan 1, de lengte van S, kunnen worden.
$XXAXXXBX$ is een zinsvorm van G. Immers, $S \Rightarrow AB \Rightarrow AXBX \Rightarrow XAXXBX \Rightarrow XXAXXXBX$.
$XbXXXbXX$ is geen zinsvorm van G. Elke zinsvorm van G ongelijk aan S,

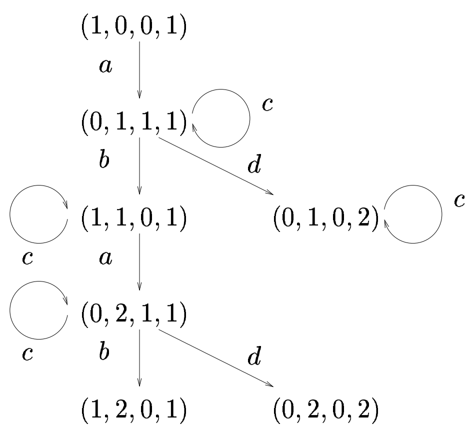
is opgebouwd uit twee delen met een deel gegenereerd vanuit A en een deel gegenereerd vanuit B. Als die A of B zelf niet meer worden aangetroffen in de zinsvorm, dan zijn ze vervangen door een a, respectievelijk een b. Een woord zoals $XbXXXbXX$ bestaande uit alleen X'en en b's, kan dus geen zinsvorm van G zijn.

(e) $L(G)$ bestaat uit alle woorden w van even lengte zodat $w = xcydz$ met $x, y, z \in \{a, b, c\}^*$ zodat $|y| = |x| + |z|$, en $c, d \in \{a, b\}$ zodat $c \neq d$, d.w.z
$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ is even en } w \neq vv\}$.

Opgave 7

(a) $\lambda \in \mathbf{FS}(N, M)$ en $M[\lambda\rangle M$; $a \in \mathbf{FS}(N, M)$ en $M[a\rangle(0, 1, 1, 1)$;
$ab \in \mathbf{FS}(N, M)$ en $M[a\rangle(0, 1, 1, 1)[b\rangle(1, 1, 0, 1)$;
$ac \in \mathbf{FS}(N, M)$ en $M[a\rangle(0, 1, 1, 1)[c\rangle(0, 1, 1, 1)$.

Een deel van de markeringsgraaf:



(b) (N, M) is niet safe, want $M[ad\rangle M_1$ met $M_1(p_4) = 2$.
(N, M) is niet begrensd, want herhaald ab vuren vanuit M leidt tot een willekeurig groot aantal tekens in plaats p_2. Immers, $M = (1, 0, 0, 1)[ab\rangle M_2 = (1, 1, 0, 1)$, een markering die gelijk is aan M op het extra teken in p_2 na. Dus vanuit M_2 kan de vuurrij ab weer optreden en dan zal p_2 weer een teken extra krijgen. Voor alle $i \geq 0$ geldt dat $M[(ab)^i\rangle(1, i, 0, 1)$ zodat het aantal tekens in p_2 niet begrensd kan worden.
(N, M) is wel deadlock-vrij. Immers, in M heeft alleen a concessie en zodra a gevuurd heeft bevatten zowel p_2 als p_4 een teken en heeft c concessie. c is ook de enige transitie die tekens uit p_2 en p_4 gebruikt, maar c geeft die tekens ook meteen weer terug. Dus na het vuren van a heeft c altijd concessie, wat er verder ook gebeurt.
(N, M) is niet levend, want na het vuren van ad vanuit de beginmarkering kan alleen c worden gevuurd en krijgt geen van de andere transities ooit nog concessie.

(c) $M[aba\rangle M'$ (zie deel markeringsgraaf hierboven)

(d) In M' hebben b, c en d alledrie concessie.
b en d zijn in conflict in M', want p_3 bevat maar één teken.
b en c hebben concurrent concessie in M', want ze hebben allebei concessie in M' en ze delen geen invoerplaatsen.
c en d hebben concurrent concessie in M', want ze hebben allebei concessie in M' en ze delen geen invoerplaatsen.

`einde uitwerkingen`