TENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA

dinsdag 29 mei 2001, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Voor de eerste 3 opgaven samen (totaal 40 punten) wordt het maximum gerekend van de hier behaalde punten en 4 maal het cijfer behaald voor het deeltentamen van maart 2001, mits dat ≥ 6 is.

Opgave 1 [15 pt]

A is een deelverzameling van $\mathbb{Z}$, de verzameling van de gehele getallen, en wordt als volgt recursief gedefinieerd:

(i) $4 \in A$ en $10 \in A$,
(ii) als $a \in A$ en $b \in A$, dan zijn ook $a + b \in A$ en $a - b \in A$,
(iii) A bevat geen andere elementen.

(a) Laat zien dat $2 \in A$ en toon aan dat $\{2m : m \in \mathbb{Z}\} \subseteq A$.

(b) Bewijs m.b.v. de recursieve definitie van A dat $A \subseteq \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Wanneer wordt een verzameling aftelbaar genoemd?

(d) Bewijs dat A aftelbaar is.

Opgave 2 [15 pt]

We bekijken een functie die twee woorden van gelijke lengte over het alfabet $\{a, b\}$, letter voor letter, in elkaar "ritst" tot een nieuw woord. Formeel is deze functie $f : \{a, b, \$\}^* \to \{a, b\}^*$ zo gedefinieerd dat de twee invoerwoorden steeds gescheiden door een \$-symbool als een string moeten worden aangeboden en dus is
$f(x) = c_1 d_1 c_2 d_2 \cdots c_n d_n$ als $x = c_1 c_2 \cdots c_n \$ d_1 d_2 \cdots d_n$
met $c_i, d_i \in \{a, b\}$ voor $1 \leq i \leq n$, en
$f(x)$ is ongedefinieerd voor de andere $x \in \{a, b, \$\}^*$.

(a) Bepaal $f(\lambda)$ $f(\$)$ $f(ab\$aa)$ $f(ab\$\$aa)$ $f(ab\$aba)$.

(b) Maak een DTM M die f berekent. Geef M d.m.v. zijn toestandsdiagram en schets het idee achter de constructie.

Opgave 3 [10 pt]

(a) Beschrijf het stopprobleem (HALTING).

(b) Is er een algemene methode om na te gaan wat een willekeurige DTM voor een gegeven invoerwoord zal doen: stoppen, hangen of eeuwig doorgaan? Waarom (niet)?

Opgave 4 [25 pt]

Gegeven is de DFA $M = (\{s, 0, 1\}, \{a, b\}, \delta, s, \{0\})$ met $\delta(s, a) = \delta(0, a) = \delta(1, a) = 0$, $\delta(0, b) = \delta(1, b) = 1$ en δ verder ongedefinieerd.

(a) Teken het toestandsdiagram van M en geef daarin duidelijk de begin- en eindtoestanden aan.

(b) Ga met behulp van configuratierijen na of de volgende woorden geaccepteerd worden door M: aa ba aab abb $abba$.

(c) Construeer een volledige DFA die $\{a,b\}^* - L(M)$, het complement van $L(M)$, accepteert.

(d) Bewijs met inductie naar $|x|$ dat voor alle $x \in \{a\}\{a,b\}^*$ geldt:
$sx \vdash^* 0$ of $sx \vdash^* 1$.
Dus: een berekening voor een woord dat met een a begint, hangt nooit.

(e) Laat zien dat voor alle woorden $x \in \{a,b\}^*$ zodat $|x| \geq 2$ geldt:
als $sx \vdash^* i \in \{0,1\}$, dan is $x \in \{a\}\{a,b\}^*\{d\}$ met
$d = a$ als $i = 0$ en $d = b$ als $i = 1$. (Inductie is niet nodig.)

(f) Wat is $L(M)$? Geef een bewijs.

(g) Maak een DFA M' zodat $L(M') = \{w \in \{a,b\}^* |$ de deelwoorden ab en ba komen even vaak voor in $w\}$.

Opgave 5 [20 pt]

(a) Geef CFG's G_1 en G_2 zodat
$L(G_1) = \{w \in \{a,b\}^* |\ |w| \text{ is oneven}\}$ en
$L(G_2) = \{ww^R |\ w \in \{a,b\}^*\}$, bestaande uit palindromen van even lengte.

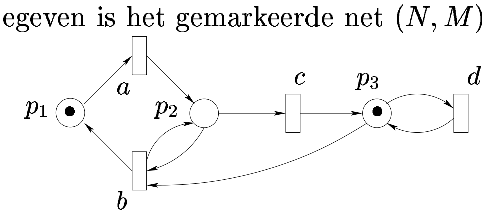
(b) Geef een CFG G zodat $L(G) = \{a,b\}^* - L(G_2)$, het complement van $L(G_2)$.

(c) Geef CFG's H_1, H_2 en H zodat
$L(H_1) = \{xaybz |\ x,y,z \in \{a,b\}^* \text{ en } |y| = |x| + |z|\}$,
$L(H_2) = \{xbyaz |\ x,y,z \in \{a,b\}^* \text{ en } |y| = |x| + |z|\}$ en
$L(H) = L(H_1) \cup L(H_2)$, bestaande uit woorden van even lengte die niet van de vorm ww zijn.

(d) Wanneer noemen we een familie van talen gesloten onder complement?

(e) Is $\mathcal{L}_{CF}$, de familie van context-vrije talen, gesloten onder complement? Waarom (niet)? Gebruik eventueel de vorige onderdelen en het feit dat de taal $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \notin \mathcal{L}_{CF}$.

Opgave 6 [15 pt]
Gegeven is het gemarkeerde net (N, M) als hieronder getekend.



(a) Teken de markeringsgraaf $\mathbf{MG}(N, M)$.

(b) Is (N, M) safe? begrensd? deadlock-vrij? levend? Waarom (niet)?

(c) Welke transities hebben concessie in de markering M', die gegeven is door $M'(p_1) = 0$ en $M'(p_2) = M'(p_3) = 1$? Welke transities zijn in conflict en welke transities hebben concurrent concessie in M'?

(d) Beredeneer dat voor elke markering M'' van N zodat $M''(p_1) + M''(p_2) + M''(p_3) \geq 1$ geldt dat het gemarkeerde net (N, M'') deadlock-vrij is.

---

einde tentamen

TENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA UITWERKINGEN

dinsdag 29 mei 2001, 14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

(a) Volgens (i) zijn 4 en 10 in A. Volgens (ii) zijn dan ook $6 = 10 - 4 \in A$ en $2 = 6 - 4 \in A$.
Laat $x \in \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$. Dus $x = 2k$ voor een of andere $k \in \mathbb{Z}$. Dat x een element van A is volgt uit (ii):
als $k = 0$, dan $x = 0 = 2 - 2 \in A$
als $k > 0$, dan kan x worden verkregen door k keer 2 op te tellen bij 0
als $k < 0$, dan kan x worden verkregen door k keer 2 af te trekken van 0

(b) Als a en b element zijn van $\{2m : m \in \mathbb{Z}\}$, dan is $a = 2k$ en $b = 2l$ voor zekere $k, l \in \mathbb{Z}$. Passen we nu (ii) toe op a en b, dan is $a + b = 2k + 2l = 2(k + l)$ en $a - b = 2k - 2l = 2(k - l)$, dus ook $a + b, a - b \in \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$.
Voor 4 en 10 geldt dat ze element zijn van $\{2m : m \in \mathbb{Z}\}$. Volgens het bovenstaande kunnen uit 4 en 10 m.b.v. (ii) alleen elementen van $\{2m : m \in \mathbb{Z}\}$ gemaakt worden. Volgens (iii) bevat A geen andere elementen dan 4 en 10 en dan elementen die volgens (ii) gemaakt kunnen worden.
Dus $A \subseteq \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Een verzameling heet aftelbaar als hij ofwel eindig is ofwel gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ (d.w.z. er bestaat een bijectie tussen die verzameling en $\mathbb{N}$).

(d) Volgens (a) en (b) is $A = \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$. Definieer nu de functie $f : A \to \mathbb{N}$ door $f(2m) = -2m + 1$ als $m \leq 0$ en $f(2m) = 2m$ als $m > 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & +2 & -2 & +4 & -4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

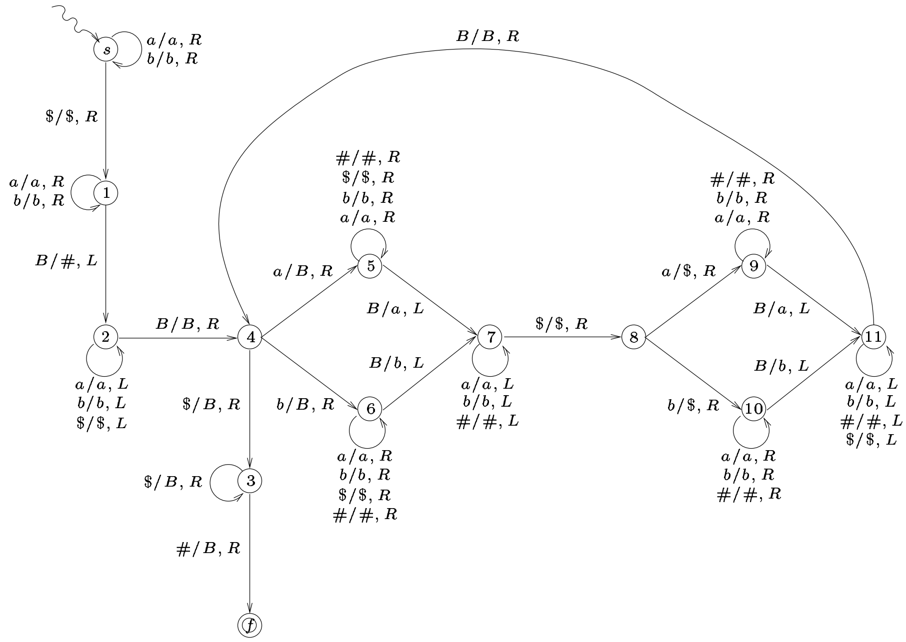
Deze functie is totaal en als $f(2m) = f(2m')$, dan $m = m'$ en dus $2m = 2m'$. Dus f is injectief. Verder is er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $2m$ zodat $f(2m) = n$. Immers, als $n = 2k$, dan is $f(2k) = n$ en als $n = 2k + 1$, dan is $f(-2k) = n$. Dus f is ook surjectief. We concluderen dus dat f een bijectie van A naar $\mathbb{N}$ is, waaruit volgt dat A aftelbaar is.

Opgave 2

(a) $f(\lambda) = \texttt{undef}$, $f(\$) = \lambda$, $f(ab\$aa) = aaba$,
$f(ab\$\$aa) = \texttt{undef}$, $f(ab\$aba) = \texttt{undef}$.

(b) Idee: Loop helemaal naar rechts — onderweg controlerend dat de inputstring van de vorm $\{a, b\}^*\$\{a, b\}^*$ is — en zet een # rechts van de inputstring neer. Herhaal vervolgens de volgende vier stappen tot er in de eerste stap geen a of b wordt gevonden.
1. loop helemaal naar links tot de meest rechtse B links van de \$, staat rechts van deze B nog een a of b, vervang deze dan door een B en onthoud het uitgeveegde symbool; zo niet ga naar 5
2. loop helemaal naar rechts tot de eerste B rechts van de # en vervang deze B door het onthouden symbool
3. loop naar links voorbij # tot een \$ wordt tegengekomen, staat rechts van deze \$ een a of b, vervang deze dan door een \$ en onthoud wat voor symbool is vervangen (wordt geen a of b meer aangetroffen, dan hangt de DTM)

4. loop helemaal naar rechts tot de eerste B rechts van de # en vervang deze B door het onthouden symbool
5. links van de \$ is geen a of b meer te vinden, loop dan helemaal naar rechts tot aan # en vervang onderweg alle \$'s door een B (als een ander symbool dan een \$ of # gelezen wordt, dan hangen) en vervang ten slotte # door een B.



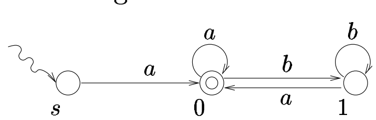
Opgave 3

(a) HALTING: Instantie: een DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, f)$ en een woord $x \in \Sigma^*$
Vraag: is $x \in L(M)$? (ofwel: stopt de berekening van M op x?)

(b) Stel dat we een algoritme SHE hebben dat voor een willekeurige DTM M en een invoerwoord x vaststelt in welke van de drie categorieën (stoppen, hangen of eeuwig doorgaan) de berekening van M op x valt. In dat geval hebben we ook een algoritme voor het stopprobleem! Want als SHE uitslag "stopt" geeft voor de berekening van M op x, dan stopt de berekening van M op x en als SHE "hangt" of "eeuwig" oplevert, dan stopt de berekening van M op x niet (succesvol). Het stopprobleem (HALTING) is echter onbeslisbaar, ofwel daar bestaat geen algoritme voor. Dus bestaat SHE ook niet.

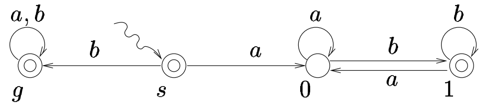
Opgave 4

(a) De eindige automaat M:



(b) $saa \vdash 0a \vdash 0$ dus $aa \in L(M)$,
$sba \nvdash$ hangt, dus $ba \notin L(M)$,
$saab \vdash 0ab \vdash 0b \vdash 1$ geen eindtoestand, dus $aab \notin L(M)$,
$sabb \vdash 0bb \vdash 1b \vdash 1$ geen eindtoestand, dus $abb \notin L(M)$,
$sabba \vdash 0bba \vdash 1ba \vdash 1a \vdash 0$ dus $abba \in L(M)$.

(c) Eerst wordt M volledig gemaakt en vervolgens verwisselen eindtoestanden en niet-eindtoestanden van rol:

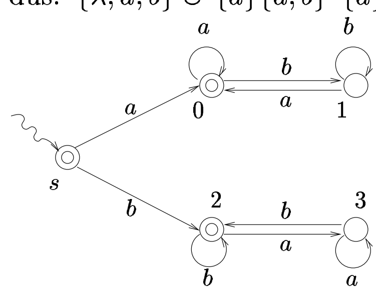


(d) Basis: $x = a$ is het kortste woord in $\{a\}\{a,b\}^*$ en daarvoor geldt $sa \vdash 0$.
Inductiehypothese: neem aan dat er een $k \geq 1$ is zodat voor alle woorden $x \in \{a\}\{a,b\}^*$ met $|x| = k$ geldt $sx \vdash^* 0$ of $sx \vdash^* 1$.
Inductiestap: laat nu $x \in \{a\}\{a,b\}^*$ en $|x| = k+1$. Dus $x = yc$ voor zekere $c \in \{a,b\}$ en $y \in \{a\}\{a,b\}^*$. Omdat $|y| = k$ weten we dat $sy \vdash^* 0$ of $sy \vdash^* 1$. Voor alle $i \in \{0,1\}$ en alle $c \in \{a,b\}$ is $\delta(i,c) \in \{0,1\}$ en dus volgt onmiddellijk dat $sx = syc \vdash^* ic \vdash j$ voor een $i \in \{0,1\}$ en een $j \in \{0,1\}$.

(e) Laat $x \in \{a,b\}^*$ met $|x| \geq 2$. Dus $x = cyd$ met $c, d \in \{a,b\}$ en $y \in \{a,b\}^*$. Omdat $sx = scyd \vdash^* i \in \{0,1\}$ volgt dat $sc \vdash p$ voor een toestand p. Omdat alleen $\delta(s,a)$ gedefinieerd is, impliceert dat dat $c = a$. Dus we weten alvast dat x met een a begint.
Uit $sx = scyd \vdash^* i \in \{0,1\}$ volgt dat er een toestand p is zodat $scyd \vdash^* pd \vdash i \in \{0,1\}$. Verder heeft 0 alleen binnenkomende pijlen met label a en 1 alleen binnenkomende pijlen met label b. Dus $d = a$ als $i = 0$ en $d = b$ als $i = 1$.
Conclusie: $x \in \{a\}\{a,b\}^*\{d\}$ met $d = a$ als $i = 0$ en $d = b$ als $i = 1$.

(f) $L(M) = \{a\} \cup \{a\}\{a,b\}^*\{a\}$. Immers:
($\subseteq$) $L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid sx \vdash^* 0\}$ per definitie. We delen $L(M)$ op volgens $L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x| \leq 1 \text{ en } sx \vdash 0\} \cup \{x \in \{a,b\}^* \mid |x| \geq 2 \text{ en } sx \vdash^* 0\}$.
Uit het toestandsdiagram volgt direct $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x| \leq 1 \text{ en } sx \vdash 0\} = \{a\}$.
Volgens onderdeel (e) is $\{x \in \{a,b\}^* \mid |x| \geq 2 \text{ en } sx \vdash^* 0\} \subseteq \{a\}\{a,b\}^*\{a\}$. Dus $L(M) \subseteq \{a\} \cup \{a\}\{a,b\}^*\{a\}$.
($\supseteq$) $sa \vdash 0$, dus $a \in L(M)$. Volgens onderdeel (d) geldt voor alle $x \in \{a\}\{a,b\}^*\{a\}$ dat $sx \vdash^* 0$ of $sx \vdash^* 1$. In combinatie met onderdeel (e) leidt dit tot de conclusie dat $sx \vdash^* 0$ voor alle $x \in \{a\}\{a,b\}^*\{a\}$. Dus $\{a\}\{a,b\}^*\{a\} \subseteq L(M)$.

(g) Een woord over $\{a,b\}$ bevat evenveel subwoorden ab als ba dan en slechts dan als in dat woord het aantal wisselingen van a naar b even groot is als het aantal wisselingen van b naar a. Dat wil zeggen dat het gaat om de woorden die niet met een andere letter eindigen dan ze beginnen. De taal waar het om gaat is dus: $\{\lambda, a, b\} \cup \{a\}\{a,b\}^*\{a\} \cup \{b\}\{a,b\}^*\{b\}$ en die wordt geaccepteerd door:



Opgave 5

(a) G_1 met axioma S_1 genereert alle woorden van oneven lengte uit $\{a,b\}^*$:
$S_1 \to aS_1a|bS_1b|aS_1b|bS_1a|a|b$;
G_2 met axioma S_2 genereert alle palindromen van even lengte uit $\{a,b]^*$:
$S_2 \to aS_2a|bS_2b|\lambda$.

(b) Het complement van $L(G_2)$ bestaat uit woorden die van oneven lengte zijn of van even lengte maar dan niet van de vorm ww^R. Dus er wordt gevraagd om een CFG G zodat: $L(G) = L(G_1) \cup \{vw \mid v, w \in \{a,b\}^*,\ |v| = |w| \text{ en } v \neq w^R\}$.

G met axioma S krijgt de volgende producties:
$S \to aSa|bSb|aSb|bSa$, $\quad S \to a|b$ (oneven lengte),
$S \to aTb|bTa$ (gegarandeerd geen palindroom) en $T \to aTa|bTb|aTb|bTa|\lambda$.

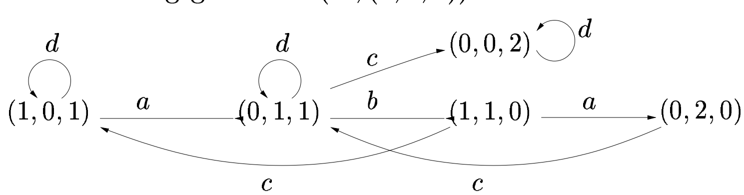
(c) Merk op dat $L(H_1) = \{xax'z'bz \mid x, x', z, z' \in \{a,b\}^* \text{ en } |x| = |x'|, |z| = |z'|\}$ en net zo is $L(H_2) = \{xbx'z'az \mid x, x', z, z' \in \{a,b\}^* \text{ en } |x| = |x'|, |z| = |z'|\}$.
H_1 met axioma Z_1: $Z_1 \to AB$, $\quad A \to XAX|a$, $\quad B \to XBX|b$, $\quad X \to a|b$;
H_2 met axioma Z_2: $Z_2 \to BA$, $\quad A \to XAX|a$, $\quad B \to XBX|b$, $\quad X \to a|b$.
De grammatica H zodat $L(H) = L(H_1) \cup L(H_2)$ krijgt axioma Z met producties $Z \to Z_1|Z_2$ en verder de producties van H_1 en H_2:
$Z_1 \to AB$, $\quad Z_2 \to BA$, $\quad A \to XAX|a$, $\quad B \to XBX|b$, $\quad X \to a|b$.

(d) Een familie van talen is gesloten onder complement als voor elke taal uit de taalfamilie geldt dat ook zijn complement in de taalfamilie zit.

(e) We gebruiken het feit dat de taal $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \notin \mathcal{L}_{CF}$. De grammatica H uit onderdeel (c) genereert alle woorden van even lengte in $\{a,b\}^*$ die niet van de vorm ww zijn; de grammatica G_1 uit onderdeel (a) genereert alle woorden van oneven lengte in $\{a,b\}^*$; $L(G_1) \cup L(H) = \{a,b\}^* - L$ het complement van L. De grammatica F met axioma Y en producties $Y \to S_1|Z$ en verder de producties van G_1 en H genereert dan $L(G_1) \cup L(H) = \{a,b\}^* - L$. Dus $\{a,b\}^* - L \in \mathcal{L}_{CF}$ terwijl zijn complement $L \notin \mathcal{L}_{CF}$.
Conclusie: $\mathcal{L}_{CF}$ is niet gesloten onder complement.

Opgave 6

(a) De markeringsgraaf van $(N, (1,0,1))$:



(b) (N, M) is niet safe, want er zijn markeringen bereikbaar waarin een plaats meer dan één teken bevat, zie de markeringsgraaf in onderdeel (a).
(N, M) is wel begrensd, want in elke bereikbare markering is het grootste aantal tekens in een plaats nog altijd ≤ 2, zie de markeringsgraaf in onderdeel (a).
(N, M) is deadlock-vrij, want in elke bereikbare markering kan minstens één transitie vuren, zie de markeringsgraaf in onderdeel (a).
(N, M) is niet levend, want in de bereikbare markering $(0,0,2)$ zijn de transities a, b en c alledrie dood.

(c) In M' hebben b, c en d concessie.
b en c zijn in conflict in M', want p_2 bevat maar één teken.
b en d zijn in conflict in M', want p_3 bevat maar één teken.
c en d hebben concurrent concessie in M', want ze hebben allebei concessie in M' en ze delen geen invoerplaatsen.

(d) Voor elke markering die tenminste één plaats een teken toekent, geldt dat er tenminste één transitie concessie heeft: als p_1 een teken bevat, kan a vuren; als p_2 een teken bevat kan c vuren en als p_3 een teken bevat kan d vuren. Verder geldt dat elke transitie minstens één uitvoerplaats heeft en dus zal het vuren van welke transitie dan ook het net nooit zonder tekens achterlaten. Dus als er een teken is in het net, zal er altijd een teken blijven en kan er altijd tenminste een transitie vuren.

`einde uitwerkingen`