DEELTENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA
Dinsdag 6 maart 2001, 14.00 u. - 16.00 u.

In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Lees de opgaven goed door en maak de onderdelen die je gelijk kan beantwoorden het eerst.

Opgave 1 [`25 pt`]
Bekijk de eindige talen $L_k = \{a(ba)^i b : 0 \leq i \leq k\}$ waarbij $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Geef L_0, L_1 en L_2. Geef ook $L_0 \cdot L_0$ en $L_0 \cdot L_0 \cdot L_0$ en $L_1 \cdot L_1$.

(b) Bewijs dat $L_0^+ = \{ab\}^+$ en laat vervolgens zien dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $L_k^+ = \{ab\}^+$.

(c) Definieer het begrip aftelbaarheid.

(d) Geef 2^{L_2}, de verzameling van deelverzamelingen van L_2. Is 2^{L_2} aftelbaar? Laat zien dat 2^{L_k} aftelbaar is, voor elke $k \in \mathbb{N}_0$.

(e) Is L_k^+ aftelbaar voor elke $k \in \mathbb{N}_0$? Waarom (niet)?
Beargumenteer dat $2^{L_k^+}$ altijd overaftelbaar is, voor elke $k \in \mathbb{N}_0$.

Opgave 2 [`20 pt`]
De taal $L \subseteq \{a\}^*$ wordt recursief gedefinieerd door:
(i) $a \in L$,
(ii) als $x \in L$, dan ook $xx \in L$
(iii) L bevat geen andere woorden.

(a) Laat zien dat $a \in L$, $a^2 \in L$, $a^4 \in L$ en $a^8 \in L$. Laat zien dat $a^3 \notin L$.

(b) Bewijs met inductie naar de definitie van L dat $L \subseteq \{a^{2^n} : n \geq 0\}$.

De taal $K \subseteq \{a\}^*$ definiëren we recursief door:
(1) $a \in K$,
(2) als $x \in K$ en $y \in K$, dan ook $xy \in K$,
(3) K bevat geen andere woorden.

(c) Ga na of $a^2, a^3, a^4 \in K$.

(d) Laat zien dat $L \subseteq K$.

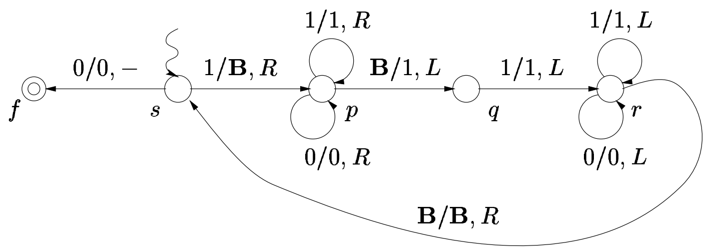
(e) Is $L = K$? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een woord uit $K - L$.

Opgave 3 [`15 pt`]
Gegeven is het toestandsdiagram van de DTM M met invoeralfabet $\{0, 1\}$.

(a) Geef accepterende configuratierijen voor de woorden 011, 101 en 1101.

(b) Geef 3 woorden die niet worden geaccepteerd door M en leg uit waarom ze niet worden geaccepteerd.
Geef een berekening van M die niet stopt en niet hangt.

M:



Opgave 4 [20 pt]

(a) Wanneer wordt een deterministische Turingmachine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, f)$ een beslisser genoemd?

(b) Definieer $\mathcal{L}_{REC}$ en $\mathcal{L}_{DTM}$.

(c) Laat zien dat $\mathcal{L}_{REC} \subseteq \mathcal{L}_{DTM}$.

(d) Formuleer het stopprobleem (HALTING).

(e) Geef een argument waaruit blijkt dat als het stopprobleem beslisbaar zou zijn, dat dan $\mathcal{L}_{REC} = \mathcal{L}_{DTM}$ zou gelden.

Opgave 5 [20 pt]

(a) Geef een DTM M die de volgende functie $g : \{a, b\}^* \to \{a\}^*$ berekent:

$$g(w) = a^{|w|_a}, \text{ voor alle } w \in \{a, b\}^*$$

Ter herinnering: voor een woord w is $|w|_a$ het aantal a's dat voorkomt in w. Dus g is een totale functie die voor elk woord w in $\{a, b\}^*$ een woord oplevert bestaande uit precies evenveel a's als er in w voorkomen.

Geef een duidelijke toelichting op het gebruikte algoritme.

(b) Geef elke toestand van de DTM die je bij onderdeel (a) gemaakt hebt een naam; noem de begintoestand s en de eindtoestand f. Laat nu met behulp van configuratierijen zien dat je Turingmachine de invoerwoorden λ, ab, ba en $baab$ op de goede manier verwerkt.

einde deeltentamen

UITWERKINGEN
DEELTENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA
Dinsdag 6 maart 2001, 14.00 u. - 16.00 u.

Opgave 1

(a) $L_0 = \{ab\}$, $L_1 = \{ab, abab\}$, $L_2 = \{ab, abab, ababab\}$
(i.h.a. is $L_k = \{ab, abab, \ldots, (ab)^k\}$).
$L_0 \cdot L_0 = \{xy \in \{a,b\}^* : x \in L_0 \text{ en } y \in L_0\} = \{abab\}$,
$L_0 \cdot L_0 \cdot L_0 = \{xyz \in \{a,b\}^* : x \in L_0, y \in L_0 \text{ en } z \in L_0\} = \{ababab\}$ en
$L_1 \cdot L_1 = \{xy \in \{a,b\}^* : x \in L_1 \text{ en } y \in L_1\} = \{abab, ababab, abababab\}$.

(b) $L_0^+ = L_0^1 \cup L_0^2 \cup L_0^3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_0^i = \{(ab)^i : i \geq 1\} = \{ab\}^+$.
Nu bewijzen we dat $L_k^+ = \{ab\}^+$ voor alle $k \in \mathbb{N}_0$.
NB Gebruik geen inductie, tenzij je het verband weet tussen L_k^+ en L_{k+1}^+.
Laat $k \in \mathbb{N}_0$ een willekeurig natuurlijk getal zijn.
Dan is $L_0 = \{ab\} = \{a(ba)^0 b\} \subseteq L_k$, dus $L_0^j \subseteq L_k^j$ voor alle $j \geq 1$ en dus $\{ab\}^+ = L_0^+ \subseteq L_k^+$.
Verder is $L_k = \{ab, abab, \ldots, (ab)^k\} \subseteq \{ab\}^+$ zodat ook $L_k^+ \subseteq \{ab\}^+$.
Conclusie: $L_k^+ = \{ab\}^+$. Omdat k willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat $L_k^+ = \{ab\}^+$ voor alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Een verzameling is aftelbaar als hij eindig is of gelijkmachtig met $\mathbb{N}$.

(d) $2^{L_2} = \{\emptyset, \{ab\}, \{abab\}, \{ababab\}, \{ab, abab\}, \{ab, ababab\}, \{abab, ababab\}, L_2\}$, een eindige verzameling dus aftelbaar.
Omdat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$, de taal L_k eindig is (met $k+1$ elementen), is ook elke 2^{L_k} een eindige verzameling (met 2^{k+1} elementen) en dus aftelbaar.

(e) $L_k^+ = \{(ab)^i : i \geq 1\}$ is een aftelbaar oneindige verzameling (is gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ via de bijectie $f((ab)^i) = i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$; je kan ook opmerken dat L_k^+ een deelverzameling is van de aftelbare verzameling $\{a,b\}^*$: "elke taal is aftelbaar"). De verzameling deelverzamelingen van een aftelbaar oneindige verzameling is overaftelbaar en dus is $2^{L_k^+}$ overaftelbaar.

Opgave 2

(a) $a \in L$ volgens (i).
$a^2 \in L$ omdat $a \in L$ en volgens (ii) is dan ook $aa = a^2 \in L$.
$a^4 \in L$ omdat $a^2 \in L$ en volgens (ii) is dan ook $a^2 a^2 = a^4 \in L$.
$a^8 \in L$ omdat $a^4 \in L$ en volgens (ii) is dan ook $a^4 a^4 = a^8 \in L$.
Volgens (iii) geldt dat als $a^3 \in L$ dan ofwel $a^3 = a$ ofwel $a^3 = xx$ met $x \in L$.
Geen van beide is het geval ($a^3 \neq a$ en er is geen a^k zodat $a^3 = a^k a^k$). Dus $a^3 \notin L$.

(b) Te bewijzen: voor alle $w \in L$ geldt dat $w = a^{2^n}$ voor een $n \geq 0$.
(B) Als $w \in L$ volgens (i), dan is $w = a = a^{2^0}$ en voldoet w dus aan de eis.
(IH) Stel $x \in L$ is zo dat $x = a^{2^n}$ voor een $n \geq 0$.
(IS) Bekijk nu $w \in L$ zodat $w = xx$. Dus $w = a^{2^n} a^{2^n} = a^{2^{n+1}}$ en voldoet aan de eis.
Conclusie: omdat volgens (iii), L geen andere elementen bevat dan die volgens (i) en (ii), geldt dat elk element van L een woord van de vorm a^{2^n} is met $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) $a^2 \in K$ omdat $a \in K$, volgens (1), en volgens (2) is dan ook $aa = a^2 \in K$.
$a^3 \in K$ omdat a en a^2 in K en volgens (2) is dan ook $aa^2 = a^3 \in K$.
$a^4 \in K$ omdat a en a^3 in K en volgens (2) is dan ook $aa^3 = a^4 \in K$.

(d) Een manier om te laten zien dat $L \subseteq K$ is het vergelijken van hun definities en inductie naar de definitie van L te gebruiken:
(B) Als $w \in L$ volgens (i), dan is $w = a$ en dus ook $a \in K$ volgens (1).
(IH) Stel $x \in L$ is zo dat ook $x \in K$.
(IS) Bekijk nu $w \in L$ zodat $w = xx$. Dus $w \in K$ volgens (2) met $y = x$.
Conclusie: omdat volgens (iii), L geen andere elementen bevat dan die volgens (i) en (ii), geldt dat elk element van L ook een element van K is.

Een andere manier is om met inductie aan te tonen dat $K = \{a^n : n \geq 1\}$ en dus $K \supseteq \{a^{2^n} : n \geq 0\} = L$.
B $a^1 = a \in K$ volgens (1).
IH Neem aan dat $a^k \in K$ voor een of andere $k \geq 1$.
IS Laat nu $n = k + 1$ en bekijk $a^n = a^k a$. Omdat $a \in K$ volgens (1) en $a^k \in K$ volgens de inductiehypothese, volgt nu uit (2) dat $a^k a = a^n \in K$.

(e) $L \neq K$, want $a^3 \notin L$, volgens onderdeel (a) en $a^3 \in K$ volgens onderdeel (c).

Opgave 3

(a) $s011 \vdash f011$
$s101 \vdash p01 \vdash 0p1 \vdash 01p \vdash 0q11 \vdash r011 \vdash rB011 \vdash s011 \vdash f011$
$s1101 \vdash p101 \vdash 1p01 \vdash 10p1 \vdash 101p \vdash 10q11 \vdash 1r011 \vdash r1011 \vdash rB1011 \vdash s1011 \vdash p011 \vdash 0p11 \vdash 01p1 \vdash 011p \vdash 01q11 \vdash 0r111 \vdash r0111 \vdash rB0111 \vdash s0111 \vdash f0111$

(b) λ, want $s \not\vdash$, dus M hangt op λ in s,
1, want $s1 \vdash p \vdash qB1 \not\vdash$, dus M hangt op 1 in q,
11, want $s11 \vdash p1 \vdash 1p \vdash q11 \vdash rB11 \vdash s11 \vdash \ldots$, dus M hangt noch stopt op 11.

NB M heeft invoeralfabet $\{0, 1\}$, dus woorden die andere symbolen dan 0 en 1 bevatten, kunnen niet als invoer dienen!

Opgave 4

(a) Een deterministische Turingmachine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, f)$ is een beslisser als er twee onderscheiden symbolen $\mathbf{y}, \mathbf{n} \in \Gamma - \Sigma$ zijn zodat voor alle $x \in \Sigma^*$ ofwel $sx \vdash^* f\mathbf{y}$ ofwel $sx \vdash^* f\mathbf{n}$.

(b) $\mathcal{L}_{REC} = \{L : L = Y(M), M \text{ een beslisser}\}$ is de familie van de beslisbare (recursieve) talen.
$\mathcal{L}_{DTM} = \{L : L = L(M), M \text{ een DTM}\}$ is de familie van de DTM (herkenbare) talen.

(c) $\mathcal{L}_{REC} \subseteq \mathcal{L}_{DTM}$
Om dit te laten zien, kan je de constructie uit het bewijs van Stelling 3 uit het TM-dictaat gebruiken:

Als $L \in \mathcal{L}_{REC}$ dan is $L = Y(M)$ voor een beslisser $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, f)$. Dus voor alle woorden $x \in L$ geldt: $sx \vdash^* f\mathbf{y}$ in M en voor alle woorden $x \in \overline{L} = \Sigma^* - L$ geldt: $sx \vdash^* f\mathbf{n}$ in M.
Uit M maken we een DTM M' zodat $L(M') = Y(M)$. We voegen een nieuwe toestand f' toe, die de eindtoestand van M' zal zijn en we voegen een nieuwe transitie toe zodat wanneer M' in toestand f een cel met het symbool $\mathbf{y}$ scant, een overgang wordt gemaakt naar f'. Omdat we ervanuit mogen gaan dat M geen transities heeft vanuit toestand f, volgt dat M' zal hangen als in toestand f een cel met symbool $\mathbf{n}$ gescand wordt.
Er geldt dan:
voor alle $x \in L$ dat $sx \vdash^* f\mathbf{y} \vdash f'\mathbf{y}$ in M' en
voor alle $x \in \overline{L}$ dat $sx \vdash^* f\mathbf{n}$ in M' enM' hangt.

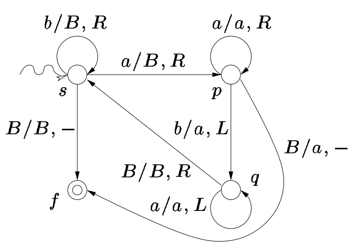
Hieruit volgt dat $L = L(M')$ en dus $L \in \mathcal{L}_{DTM}$.

(d) HALTING:
Instantie: een DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, f)$ en een woord $x \in \Sigma^*$.
Vraag: is $x \in L(M)$?

(e) We weten al uit onderdeel (c) dat elke beslisbare taal herkenbaar is.
We moeten nu alleen nog het omgekeerde laten zien onder de veronderstelling dat HALTING beslisbaar is.
Bekijk dus een willekeurige taal $L \in \mathcal{L}_{DTM}$, d.w.z. $L = L(M)$ voor een zekere DTM M. Als HALTING beslisbaar is, kunnen we gegeven een invoerwoord x voor M het algoritme voor HALTING gebruiken om te bepalen of $x \in L(M)$ en hoeven we M zelf helemaal niet te gebruiken om x te herkennen (met het risico dat hij nooit zal stoppen of hangen). Dus L is beslisbaar.

Opgave 5

(a) De Turingmachine krijgt een woord bestaande uit a's en b's aangeboden. De bedoeling is dat de b's verwijderd worden en dat de a's op elkaar gaan aansluiten.
Om dat te bewerkstelligen, worden eerst de b's waarmee het woord eventueel begint, uitgeveegd tot de eerste a wordt tegengekomen. Als die er niet is, dan bevatte het invoerwoord geen a's en stopt de Turingmachine met een lege band (dus met $\lambda = a^0$ als uitvoer). Als de kop wel een a tegenkomt, wordt die als volgt "opgeschoven": hij wordt uitgeveegd, de kop gaat naar rechts tot het eerste symbool dat geen a is (dus een B of een b) en vervangt dat door a. Als het vervangen symbool een B is, dan bevatte het woord verder geen b's en is het werk klaar. Als de a op de plek van een b is geschreven, dan gaat de kop terug naar links naar het begin van het beschreven deel van de band en begint het zoeken naar een a opnieuw. Dit gaat door totdat er geen b's meer zijn.
Deze oplossing, die afkomstig is van een van de tentamendeelnemers, is tot nu toe de meest efficiënte (slechts 4 toestanden!) die we gezien hebben.



(b) $g(\lambda) = a^0 = \lambda$ en $s \vdash f$;
$g(ab) = a^1 = a$ en $sab \vdash pb \vdash qBa \vdash sa \vdash p \vdash fa$;
$g(ba) = a^1 = a$ en $sba \vdash sa \vdash p \vdash fa$;
$g(baab) = a^2$ en
$sbaab \vdash saab \vdash pab \vdash apb \vdash qaa \vdash qBaa \vdash saa \vdash pa \vdash ap \vdash afa$