TENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA
dinsdag 28 mei 2002, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven waarbij steeds de waardering tussen [en] gegeven is. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Voor de eerste drie opgaven samen (totaal 40 punten) wordt het maximum gerekend van de hier behaalde punten en viermaal het cijfer behaald voor het deeltentamen van februari 2002, mits dat ≥ 6 is.

Opgave 1 [15 pt]
De taal $L \subseteq \{a,b\}^*$ wordt recursief gedefinieerd door:
(i) $a, bb \in L$,
(ii) als $x \in L$, $y \in L$ en $|x| = |y|$, dan is $xy \in L$,
(iii) L bevat geen andere woorden.

(a) Ga voor de vier volgende woorden na of ze al dan niet tot L behoren:
$b \quad ab \quad aabb \quad abbb$

Laat $K = \{w \in \{a,b\}^* : |w| = 2^n \text{ voor een } n \in \mathbb{N}_0\}$.

(b) Bewijs met inductie naar de definitie van L dat $L \subseteq K$.

(c) Is $L = K$? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een woord $w \in K - L$.

(d) We veranderen nu *(ii)* van de boven gegeven definitie van L in
(ii)' als $x \in L$, $y \in L$, dan is $xy \in L$.
Welke taal L wordt gedefinieerd door *(i)*, *(ii)'* en *(iii)* ? (Zonder bewijs)

Opgave 2 [15 pt]

(a) Definieer het begrip aftelbaarheid.

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ is een oneindige, aftelbare verzameling symbolen en
V is de verzameling bestaande uit alle woorden over eindig veel symbolen uit A.
Dus $V = \{w : \text{ er is een } j \in \mathbb{N} \text{ zodat } w \in \{a_1, \ldots a_j\}^*\}$.
De functie $f : V \to \{0,1\}^*$ is gedefinieerd door:
$f(\lambda) = \lambda$, $f(a_i) = 10^i1$ voor alle $i \geq 1$ en $f(yc) = f(y)f(c)$.

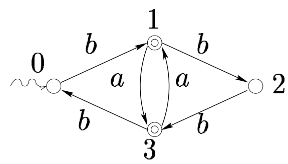
(b) Bereken $f(a_2a_4)$, $f(a_2a_4a_3)$, $f(a_2a_4a_3a_2)$ en $f(a_2a_4a_1a_2)$.

(c) Laat zien dat voor alle $x, y \in V$ geldt dat als $x \neq y$ dan $f(x) \neq f(y)$.
Is f totaal? Is f injectief? Geef voldoende uitleg.

(d) Bewijs dat V aftelbaar is.

Opgave 3 [10 pt]
Maak een DTM M met invoeralfabet $\{1\}$, die unair gerepresenteerde getallen door 3 “heelt”. Dus M moet de functie $h : \{1\}^* \to \{1\}^*$ berekenen met $h(1^n) = 1^k$ als $n = 3k + j$ met $k \geq 0$ en $j \in \{0,1,2\}$.
Geef de Turingmachine door middel van zijn toestandsdiagram en schets het idee achter de gebruikte constructie.
Test of de geconstrueerde M correct werkt voor de invoergetallen 0 en 4 door de berekeningen (configuratierijen) van M te geven horend bij de invoerstrings 1^0 en 1^4.

Opgave 4 [20 pt]
Getekend is de deterministische eindige automaat $M = (\{0,1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{1,3\})$:



(a) Ga met behulp van configuratierijen na of de volgende woorden worden geaccepteerd door M: bba baa $baab$ $babab$ $babba$

(b) Bewijs met inductie naar de lengte van x dat voor alle $x \in \{a,b\}^*$ geldt:
als $0x \vdash^* i$, dan is $|x|_b$, het aantal b's in x, even als $i = 0$ of $i = 2$,
en $|x|_b$ is oneven als $i = 1$ of $i = 3$.

(c) Is $L(M)$ gelijk aan $\{w \in \{a,b\}^* : |w|_b \text{ is oneven}\}$ of is de ene taal echt bevat in de ander? Leg uit.

(d) Construeer een DFA die het complement $\{a,b\}^* - L(M)$ van $L(M)$ accepteert.

Opgave 5 [20 pt]
De context-vrije grammatica G is gegeven door:
$S \longrightarrow aTb|bTa|T \quad T \longrightarrow aU|bU|\lambda \quad U \longrightarrow aT|bT$

(a) Geef voor de woorden $abba$ en $aabb$ alle mogelijke afleidingsbomen met bij elke boom een bijbehorende afleiding.

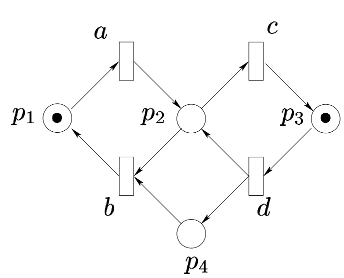
(b) Laat zien dat voor elk woord $w \in \{a,b\}^*$ geldt:
$T \Rightarrow^* w$ dan en slechts dan als de lengte van w even is.

(c) De grammatica H is gegeven door:
$S \longrightarrow T \quad T \longrightarrow aU|bU|\lambda \quad U \longrightarrow aT|bT$
Toon aan dat $L(H) = L(G)$. Wat is $L(G)$?

(d) Wanneer wordt een context-vrije grammatica dubbelzinnig genoemd?
Wanneer spreekt men van een inherent dubbelzinnige context-vrije taal?

(e) Laat zien dat G dubbelzinnig is.
Is $L(G)$ inherent dubbelzinnig? Waarom (niet)?

Opgave 6 [20 pt]
Gegeven is het gemarkeerde net (N, M) als hieronder getekend.



(a) Geef vier vuurrijen uit $\mathbf{FS}(N, M)$ met de markeringen waar ze heen leiden.

(b) Welke transities hebben concessie in de markering $\widetilde{M}$ met $\widetilde{M}(p_1) = 0$ en $\widetilde{M}(p_2) = \widetilde{M}(p_3) = \widetilde{M}(p_4) = 1$?
Welke daarvan zijn daarbij in conflict en welke hebben concurrent concessie?

(c) Beredeneer dat voor elke markering M' van N bereikbaar vanuit M geldt dat $M'(p_1) + M'(p_2) + M'(p_3) = 2$.

(d) Is (N, M) safe? begrensd? deadlock-vrij? levend? Waarom (niet)?

`einde tentamen`

TENTAMEN INLEIDING FUNDAMENTELE INFORMATICA
UITWERKINGEN
dinsdag 28 mei 2002, 14.00 - 17.00 uur

Opgave 1

(a) — $b \notin L$, want b wordt niet genoemd in (i) en b kan ook niet m.b.v. (ii) zijn gemaakt, omdat alle woorden geconstrueerd volgens (ii) van even lengte zijn.
Volgens (iii) bevat L geen andere woorden dan die beschreven in (i) en (ii).
— $ab \notin L$, want ab wordt niet genoemd in (i) en ab kan alleen m.b.v. (ii) zijn gemaakt als $a \in L$ en $b \in L$, maar dat laatste is niet het geval zoals we net hebben gezien.
Volgens (iii) bevat L geen andere woorden dan die beschreven in (i) en (ii).
— $aabb \in L$, want volgens (i) is $a \in L$ en volgens (ii) is dan $aa = a \cdot a \in L$; verder is $bb \in L$ volgens (i); dus volgens (ii) is $aabb \in L$.
— $abbb \notin L$, want $abbb$ wordt niet genoemd in (i) en $abbb$ kan alleen m.b.v. (ii) zijn gemaakt, als $ab \in L$, maar dat is niet het geval hebben we net gezien.
Volgens (iii) bevat L geen andere woorden dan die beschreven in (i) en (ii).

(b) Uit de definitie van L volgt onmiddellijk dat $L \subseteq \{a,b\}^*$.
Nog te bewijzen: voor alle $z \in L$ geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ is zodat $|z| = 2^n$.
Bewijs met inductie naar de definitie van L:
(basis) als $z \in L$ volgens (i), dan is $z = a$ of $z = bb$.
Er geldt $|a| = 2^0$ en $|bb| = 2^1$.
(inductiehypothese) neem nu aan dat $z = xy$ met $x, y \in L$ zodat $|x| = |y| = 2^k$ met $k \in \mathbb{N}$,
(inductiestap) dan is $|z| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.
Dus door (ii) toe te passen op woorden x, y met$|x| = |y| = 2^k$ krijg je weer een woord met een lengte 2^n voor een $n \in \mathbb{N}$. Uit (iii) volgt nu dat elk woord van L ook een woord uit K is.

(c) $K \neq L$, want bijvoorbeeld $b \in K - L$. Immers $|b| = 2^1$, dus $b \in K$, terwijl $b \notin L$ volgens onderdeel (a) hierboven.

(d) als we in onderdeel (ii) van de definitie van L de eis op de lengtes van x en y laten vallen, dan is elke concatenatie van twee woorden van L weer een woord van L. De basiswoorden zijn a en bb, dus $L = \{a, bb\}^+$.

Opgave 2

(a) Een verzameling heet aftelbaar als hij ofwel eindig is ofwel gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ (d.w.z. er bestaat een bijectie tussen die verzameling en $\mathbb{N}$).

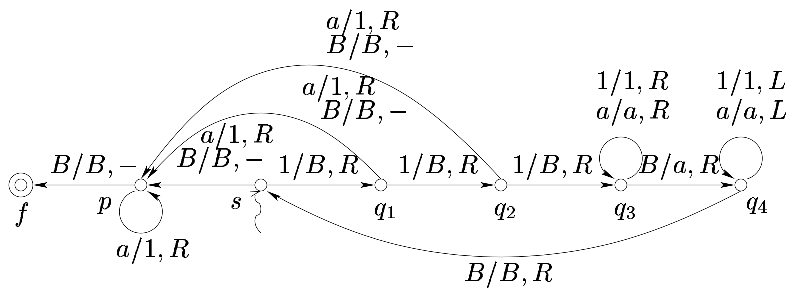
(b) $f(a_2a_4) = f(a_2)f(a_4) = 10^21 \cdot 10^41 = 10^2110^41$,
$f(a_2a_4a_3) = f(a_2a_4)f(a_3) = 10^2110^41 \cdot 10^31 = 10^2110^4110^31$,
$f(a_2a_4a_3a_2) = f(a_2a_4a_3)f(a_2) = 10^2110^4110^31 \cdot 10^21 = 10^2110^410^3110^21$ en
$f(a_2a_4a_1a_2) = f(a_2a_4a_1)f(a_2) = f(a_2a_4)f(a_1)f(a_2) = 10^2110^41 \cdot 101 \cdot 10^21 = 10^2110^4110110^21$.

(c) Laat $x = x_1x_2 \ldots x_k$ en $y = y_1y_2 \ldots y_l$ met elke $x_i, y_j \in A$, twee verschillende woorden zijn uit V. Omdat voor het coderen van een letter uit A volgens f altijd twee optredens van het symbool 1 worden gebruikt, weten we dat $|x|_1 = 2k$ en $|y|_1 = 2l$. Dus als $|x| \neq |y|$, dan is ook $f(x) \neq f(y)$.
Als x en y even lange verschillende woorden zijn dan is er een $1 \leq i \leq k$ zodat $x_1 \ldots x_{i-1} = y_1 \ldots y_{i-1}$ en $x_i \neq y_i$. Dat wil zeggen dat er m, n zijn zodat $f(x_i) = 10^m1 \neq 10^n1 = f(y_i)$. Dus $f(x) = f(x_1 \ldots x_{i-1})10^m1f(x_{i+1}) \ldots f(x_k) \neq$

$f(x_1 \dots x_{i-1})10^n1f(y_{i+1}) \dots f(y_k) = f(y)$.
f is totaal, want f is gedefinieerd voor λ, voor alle symbolen van A en elk ander woord $x \in V$ is van de vorm $x = x_1 \dots x_k$ met $x_i \in A$, en dan is $f(x) = f(x_1) \dots f(x_k)$.
f is injectief, want f is totaal en als net aangetoond levert f een verschillend resultaat voor verschillende woorden x en y uit V.

(d) V is aftelbaar, omdat de verzameling $\{0,1\}^*$ aftelbaar is en we in f een injectieve functie hebben die V naar $\{0,1\}^*$ afbeeldt (dus $f(V) \subseteq \{0,1\}^*$ is aftelbaar en omdat f injectief is, zijn V en $f(V)$ gelijkmachtig).
Merk op dat we het argument dat elke taal over een (eindig!) alfabet aftelbaar is hier niet direct kunnen gebruiken, omdat V een verzameling woorden is over een oneindige verzameling symbolen.

Opgave 3 Een string bestaande uit 1-en door 3 "helen" betekent dat we door 3 delen en de rest weggooien.



Bij aanvang van de berekening staat de kop op de eerste 1 (als de invoer niet leeg dus "0" is) of op een B (invoer "0"). Het idee is om per drie 1-en een 1 te schrijven (eerst als a). De kop wandelt naar rechts waarbij de eerste drie 1-en door B's worden vervangen. Helemaal rechts wordt een a geschreven, waarna de kop weer naar links gaat tot de (nieuwe) eerste 1 en het proces wordt herhaald. Wanneer geen drie 1-en worden aangetroffen, maar slechts twee, een of nul, dan is de "heling" voltooid en kan elke a door een 1 worden vervangen.
Testinvoer:
0: $s \vdash p \vdash f$ en $h(1^0) = 0$, dus ok
4: $s1111 \vdash q_1 111 \vdash q_2 11 \vdash q_3 1 \vdash 1q_3 \vdash q_4 1a \vdash q_4 B1a \vdash s1a \vdash q_1 a \vdash 1p \vdash 1f$ en $h(1^4) = 1$, dus ok.

Opgave 4

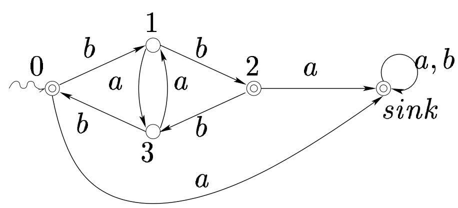
(a) $0bba \vdash 1ba \vdash 2a \not\vdash$ geen acceptatie
$0baa \vdash 1aa \vdash 3a \vdash 1$ eindtoestand, acceptatie
$0baab \vdash^* 1b \vdash 2$ geen eindtoestand, geen acceptatie
$0babab \vdash 1abab \vdash 3bab \vdash 0ab \not\vdash$ geen acceptatie
$0babba \vdash 1abba \vdash 3bba \vdash 0ba \vdash 1a \vdash 3$ eindtoestand, acceptatie

(b) Voor alle $x \in \{a,b\}^*$ geldt: als $0x \vdash^* i$, dan is $|x|_b$ even als $i = 0$ of $i = 2$, en $|x|_b$ is oneven als $i = 1$ of $i = 3$.
Bewijs met inductie naar $|x|$:
(basis, $|x| = 0$) $0\lambda = 0 \vdash^0 0$ en $|\lambda|_b = 0$.
(inductiehypothese) er is een $k \geq 0$ zodat voor alle $y \in \{a,b\}^*$:
als $|y| \leq k$ en $0y \vdash^* i$, dan is $|y|_b$ even als $i = 0$ of $i = 2$, en $|y|_b$ is oneven als $i = 1$ of $i = 3$.

(inductiestap) laat $|x| = n$ met $n = k+1$ en neem aan dat $0x \vdash^* i$. Dus $x = yc$ voor een $y \in \{a,b\}^*$ met $|y| = k$ en een $c \in \{a,b\}$.
We onderscheiden de verschillende gevallen.
$i = 0$ of $i = 2$.
Dan moet $c = b$ zijn en $0x = 0yb \vdash^* 3b \vdash 0$ of $0x = 0yb \vdash^* 1b \vdash 2$. Uit de inductiehypothese volgt dan dat het aantal b's in y oneven is. Omdat $x = yb$, is dus het aantal b's in x even, als gewenst.
$i = 1$ of $i = 2$. Bekijk eerst het geval dat $c = a$.
Dan weten we: $0x = 0ya \vdash^* 3a \vdash 1$ of $0x = 0ya \vdash^* 1a \vdash 3$. Uit de inductiehypothese volgt dan dat het aantal b's in y oneven is. Omdat $x = ya$, is het aantal b's in x ook oneven, als gewenst.
Bekijk nu het geval dat $c = b$.
Dan weten we: $0x = 0yb \vdash^* 0b \vdash 1$ of $0x = 0yb \vdash^* 2b \vdash 3$. Uit de inductiehypothese volgt dan dat het aantal b's in y even is. Omdat $x = yb$, is het aantal b's in x dus oneven, als gewenst.

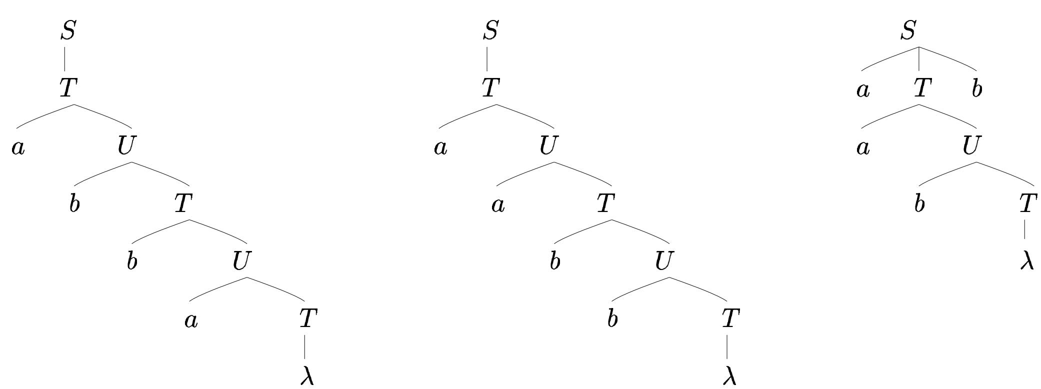
(c) Uit onderdeel (b) volgt — omdat 1 en 3 de eindtoestanden van M zijn — dat $L(M) \subseteq \{w \in \{a,b\}^* : |w|_b \text{ is oneven }\}$. Deze inclusie is strict, omdat bijvoorbeeld het woord $babab \notin L(M)$ (zie (a)).

(d) Eerst maken we M volledig, vervolgens laten we eindtoestanden en niet-eindtoestanden van rol verwisselen:



Opgave 5

(a) $abba$ heeft één afleidingsboom. Daarbij hoort (als enige) de afleiding: $S \Rightarrow T \Rightarrow aU \Rightarrow abT \Rightarrow abbU \Rightarrow abbaT \Rightarrow abba$.
Voor $aabb$ heeft G twee afleidingsbomen. Daarbij horen, respectievelijk, de afleidingen: $S \Rightarrow T \Rightarrow aU \Rightarrow aaT \Rightarrow aabU \Rightarrow aabbT \Rightarrow aabb$ en
$S \Rightarrow aTb \Rightarrow aaUb \Rightarrow aabTb \Rightarrow aabb$.



(b) Als $T \to \lambda$ wordt gebruikt worden 0 (een even aantal) terminale symbolen geïntroduceerd. Anders wordt een productie $T \to cU$ met $c \in \{a,b\}$ en vervolgens een productie $U \to dT$ met $d \in \{a,b\}$ gebruikt. Dus er zijn verder

alleen afleidingen $T \Rightarrow^{2k+1} xcU \Rightarrow xcdT$ met $x \in \{a,b\}^*$ en $|x| = 2k$ zodat elk terminaal woord afgeleid uit T een even lengte heeft.
Andersom, als $w = \lambda$, dan gebruiken we de productie $T \to \lambda$ zodat $T \Rightarrow \lambda$;
als $w = cd$ met $c, d \in \{a,b\}$, dan $T \Rightarrow cU \Rightarrow cdT \Rightarrow cd = w$;
als $w = c_1 d_1 \dots c_k d_k$ met $k \geq 1$ en alle $c_i, d_i \in \{a,b\}$, dan
$T \Rightarrow c_1 U \Rightarrow c_1 d_1 T \Rightarrow^{2(k-1)} \Rightarrow c_1 d_1 \dots c_k d_k T \Rightarrow c_1 d_1 \dots c_k d_k = w$.
(In feite een inductief argument.)

(c) Het enige verschil tussen de grammatica's G en H is dat G de producties $S \to aTb$ en $S \to bTa$ extra heeft. Deze producties kunnen in G alleen worden gebruikt als de eerste stap van een afleiding en leveren dan een zinsvorm cTd op met $c, d \in \{a,b\}$ en $c \neq d$. Volgens het vorige onderdeel kan je uit zulke zinsvormen alleen terminale woorden afleiden die een even lengte hebben en kan je die ook rechtstreeks uit T afleiden. De extra producties van G zijn dus in feite overbodig en G en H dus equivalent.
De taal $L(G) = L(H)$ bestaat uit alle woorden $w \in \{a,b\}^*$ zodat $S \Rightarrow T \Rightarrow^* w$.
Uit onderdeel (b) concluderen we $L(G) = L(H) = \{w \in \{a,b\}^* : |w| \text{ is even}\}$.

(d) Een context-vrije grammatica is dubbelzinnig als er een woord in $L(G)$ is waarvoor G twee of meer verschillende afleidings*bomen* heeft.
Een context-vrije taal is inherent dubbelzinnig als elke CFG die $L(G)$ genereert dubbelzinnig is.

(e) G is dubbelzinnig omdat $aabb$ twee verschillende afleidingsbomen heeft (zie (a)).
G is niet inherent dubbelzinnig, want H de grammatica uit (c) die ook $L(G)$ genereert, is niet dubbelzinnig (elke afleiding voegt de terminalen in een afleiding stuk voor stuk van links naar rechts toe).

Opgave 6

(a) $M = (1,0,1,0)[a\rangle(0,1,1,0)[c\rangle(0,0,2,0)[d\rangle(0,1,1,1)$
dus λ, a, ac en acd zijn (voorbeelden van) vuurrijen van (N, M).

(b) In $(0,1,1,1)$ hebben b, c en d concessie. Het paar b, d heeft concurrent concessie, evenals het paar c, d, maar b en c zijn in conflict (p_2 heeft maar 1 teken).

(c) We bekijken het effect van het optreden van de verschillende transities op het totaal aantal tekens in de plaatsen p_1, p_2 en p_3: transitie a: p_2 plus een, p_1 min een; transitie b: p_1 plus een, p_2 min een; transitie c: p_3 plus een, p_2 min een; transitie d: p_2 plus een, p_3 min een. Het totaal aantal tekens in deze 3 plaatsen blijft dus gelijk. Omdat voor de beginmarkering M geldt dat $M(p_1)+M(p_2)+M(p_3) = 1+0+1 = 2$, zal dus voor alle markeringen bereikbaar vanuit M gelden dat p_1, p_2 en p_3 samen 2 tekens bevatten.

(d) (N, M) is niet safe, want $M[ac\rangle(0,0,2,0)$ en dan bevat p_3 twee tekens.
(N, M) is niet begrensd, want $M = (1,0,1,0)[dc\rangle(1,0,1,1)$ waarmee dus een markering bereikt is die een teken meer heeft dan de beginmarkering. Dus $M = (1,0,1,0)[(dc)^k\rangle(1,0,1,k)$ en het aantal tekens in p_4 kan onbegrensd groeien.
(N, M) is deadlock-vrij want volgens (c) zijn er altijd 2 tekens in de plaatsen p_1, p_2 en p_3 samen zodat altijd a, c of d kan vuren. (N, M) is zelfs levend, om die reden:
Als p_1 een teken bevat, kan a vuren, waarna c, waarna d, waarna b, wat als resultaat heeft dat p_1 weer een teken bevat. Als p_2 een teken bevat kan c vuren waarna, als hierboven, d, b en a. Als p_3 een teken bevat, kan d vuren waarna b, a en c. Dus vanuit elke bereikbare markering is het voor elke transitie mogelijk een markering te bereiken waarin die transitie kan vuren.