

Tentamen Analyse 2NA. Woensdag 6 juli 2016, 14.00-17.00 uur.

Alle antwoorden dienen vergezeld te gaan van een motivering in de vorm van een berekening of redenering. Grafische rekenmachines zijn niet toegestaan!

1. Gegeven is de functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x, y) = xye^{-3x-2y}$ waarbij $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ het eerste kwadrant in $\mathbb{R}^2$ is.

Bewijs dat f op D een minimum en een maximum aanneemt en bepaal het (absolute) minimum en maximum van de functie f op D (geef zowel de plaats als de waarde). (11p)

2. $E \subset \mathbb{R}^2$ is de ellips met vergelijking $2x^2 + 3y^2 = 5$.

- a. Bereken de integraal $\oint_E (e^x \cos x + 2xy) dx + 2x^2 dy$ met een parametervoorstelling. (8p)

- b. Bereken de integraal $\oint_E (e^x \cos x + 2xy) dx + 2x^2 dy$ met de stelling van Green. (6p)

3. $\mathbf{F}$ is het vectorveld $x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ in $\mathbb{R}^3$.

- a. Bepaal een parametervoorstelling van de veldlijn (of integraalkromme) van $\mathbf{F}$ die door het punt $(1, -1, 1)$ gaat. (7p)
- b. Leg uit, zonder te rekenen, dat er een op $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd vectorveld $\mathbf{G}$ bestaat met de eigenschap dat $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (3p)
- c. Bepaal een vectorveld $\mathbf{G}$ zodanig dat $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (7p)

Op de achterzijde staan nog meer opgaven!

4. C is de snijkromme van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ en het vlak $x + y - z = 2$.

Gebruik Lagrange-multiplicatoren om het punt op C te vinden dat minimale afstand heeft tot het punt $(1, 1, 1)$. (10p)

5. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ het geparametriseerde oppervlak T met parameter-
voorstelling

$$x = \cos u(2 + \cos v), \quad y = \sin u(2 + \cos v), \quad z = \sin v \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Het oppervlak T is een 'torus', een gesloten oppervlak dat de vorm heeft van een donut. B is het gebied dat wordt ingesloten door T .

- a. Bepaal de oppervlakte van T . (8p)
- b. Bepaal de inhoud van B . (8p)

Tentamen - Analyse II - Wiskunde

Woensdag 6 juli 2016 - zaal 407/409 Snellius - 14.00-17.00

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven.

Opgave 1 Beschouw de scalaire functie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = y(2y - x^2 + 1)$$

en het gebied

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

- Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$ op $\mathbb{R}^2$ en klassificeer deze (minimum/maximum/zadelpunt).
- Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ beperkt tot de rand $\partial\mathcal{D}$.
- Vind (en klassificeer) alle lokale/globale maxima/minima van $f(x, y)$ op $\mathcal{D}$.

Opgave 2 Bereken met behulp van cilinder-coördinaten de integraal

$$\int_{-2}^0 \int_{2y^2}^{-4y} \int_{-y}^{\sqrt{z-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dz dy.$$

Opgave 3 Beschouw het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$$

samen met het oppervlak

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2 \text{ en } z \leq 2\},$$

georiënteerd zodat de normaalvectoren naar beneden wijzen.

- (a) Bereken de vector-lijn-integraal

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{R},$$

door gebruik te maken van een directe berekening. NB: Zoals gebruikelijk betekent $\partial\mathcal{S}$ de (oppervlakte)-rand van $\mathcal{S}$, positief georiënteerd ten opzichte van de oriëntatie van $\mathcal{S}$.

- (b) Bereken nogmaals de vector-lijn-integraal $\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$, maar pas nu de stelling van Stokes toe op het oppervlak $\mathcal{S}$.

Tentamen Software Engineering

Modeling

Tijd: plusminus 1½ uur (zelf te verdelen)

Cijfer: (double)(punten+10)/10

Succes!

1. Klassendiagram (40pt)

Ons bedrijf is gevraagd een racospel te ontwikkelen. Dit racospel speelt zich af op een ruw terrein met kuilen, ribbels, schansen en waterpartijen.

Het spel bestaat uit 10 verschillende levels die allemaal minimaal 5 hindernissen hebben. Om het spel niet te gek te maken mogen er maximaal 25 van dit soort obstakels worden geplaatst. De volgende hindernissen moeten worden opgenomen:

- Kuilen hebben een locatie een breedte en een diepte
- Ribbels hebben een hoeveelheid (hoeveel ribbels het zijn) en een locatie
- Een schans staat op een bepaalde positie en heeft een hoogte
- Waterpartijen hebben een bepaalde kleur, locatie en 'remfactor'

Op elk level (met nummer) worden 3 wedstrijden gehouden. Een wedstrijd heeft een nummer, prijsgeld en winnaar. In een wedstrijd rijden 4 autootjes mee, deze zijn altijd te achterhalen. Autootjes zijn of een truck of een hummer. Hummers kunnen kleine spronggetjes maken en hebben een bepaalde veringssterkte, trucks hebben een merk chassis en kunnen andere auto's opzij duwen. Ze kunnen beide natuurlijk remmen, sturen (rechts en links) en gas geven. Natuurlijk hebben ze wel allemaal dezelfde maximum snelheid anders zou het niet eerlijk zijn.

Elke auto wordt bestuurt door een vast chauffeur, chauffeurs rijden altijd op dezelfde wagen. In ons spel zijn ze nooit werkloos. Een chauffeur heeft een startbedrag als eigenschap en kan bluffen, verschillende soorten chauffeurs doen dat op andere wijze. Vrouwen (met haarkleur en outfit) bijvoorbeeld doen dat door zich op te maken, mannen doen dat weer door hun spieren te laten zien (van bepaalde sterkte). Het staat chauffeurs vrij om uit woede auto's van de tegenstander te bekrassen.

In het spel zijn verder nog 3 soorten powerups die door een autootje gepakt kunnen worden:

- Reparatie: de auto wordt meteen gerepareerd (met bepaalde hoeveelheid)
- Geld: de chauffeur verdient een bepaalde hoeveelheid geld
- Nitro: deze bron van kracht (met variabele hoeveelheid) kan op een later moment geactiveerd worden. De auto gaat dan super snel rijden

Opdracht:

Teken voor deze casus een klassendiagram. Hou je hierbij aan de volgende richtlijnen over wat te tekenen:

- Klassen met attributen (zonder type) en operaties; operaties zijn public of private
- Generalisaties

- Associaties met naam en leesrichting (of rollen) en multipliciteiten en navigabiliteit. Teken alleen de navigatiekruisen en -pijlen die expliciet in de beschrijving vermeld staan. Laat ze anders ongedefinieerd.
- Afhankelijkheden (dependencies).

NB. Attributen die overlappen met associaties worden fout gerekend!

2. **BPMN** (25pt)

De fysiotherapiebehandeling [bron: HHS].

Wanneer dhr. Koning voor zijn eerste behandeling bij de fysiotherapeut komt voor een behandeling, zal de fysiotherapeut starten vanuit het bestuderen van het dossier wat hij per patiënt bijhoudt. In dit dossier houdt de fysiotherapeut bijvoorbeeld bij hoe de voortgang sinds de vorige behandeling is, of de patiënt zijn oefeningen goed doet en of er speciale situaties zijn waar hij rekening mee moet houden. Na het inzien van dit dossier bekijkt de fysiotherapeut het specifieke behandelplan van dhr.

Koning, waarin o.a. de gemaakte afspraken staan van de oefeningen, die dhr. Koning zelfstandig en thuis moet doen. Vervolgens bepaalt de fysiotherapeut de prioriteit binnen de behandeling, maar als de patiënt een CYS watch draagt wordt deze eerst nog uitgelezen.

Hij kan een keuze maken uit de volgende mogelijkheden: een echo maken, manueel behandelen, masseren of oefentherapie. Deze keuzes bestaan afzonderlijk uit meerdere activiteiten waarvan het hier niet nodig is deze apart te vermelden. Eventueel kunnen meerdere keuzes na elkaar verricht worden, dus bijvoorbeeld eerst een echo en daarna een manuele behandeling.

Als de fysiotherapeut klaar is, legt hij de voortgang en resultaten van de behandeling vast. Als daar aanleiding toe is spreekt de fysiotherapeut nieuwe oefeningen af en past het behandelplan hierop aan. Wanneer de aandoening nog niet over is, wordt een nieuwe afspraak gemaakt.

Daarmee is de sessie bij de fysiotherapeut afgerond.

Maak hiervan een BPMN Model

3. **Toestandsdiagram** (25pt)

Een vervoersbedrijf heeft diverse containers. Deze containers zijn niet van het bedrijf zelf, maar van andere eigenaren. Telkens als de container gebruikt wordt voor vervoer van vracht, krijgt de eigenaar hier een vergoeding (betaling) voor. Uiteraard dient de klant de huur en het vervoer te betalen. De klant ontvangt hiertoe een factuur.

De containers kunnen door eigenaren worden aangeboden. Zodra een eigenaar de container aanbiedt, wordt de container op een groot terrein van het bedrijf geplaatst. Zodra er een vracht voor de container beschikbaar is, wordt de container van het terrein naar de loods gebracht. De status van de container verandert in te vullen, zodat de planner precies weet welke containers gevuld worden (en daarna dus vervoerd moeten worden). Zodra een container vol is en de transportdocumenten zijn in orde, wordt de container gepland voor het eerstvolgende transport. De container gaat op transport.

De container wordt naar zijn eindbestemming vervoerd en komt leeg terug. Na inspectie wordt de container weer op het grote terrein van het bedrijf gezet. Als een container door de eigenaar weer opgeëist wordt, moet de container op het grote terrein staan, voordat de container weer teruggegeven wordt aan de eigenaar.

Opgave:

Maak voor het object container een toestandsdiagram.

Tentamen Kunstmatige intelligentie

Universiteit Leiden — Informatica

Dinsdag 5 juli 2016, 14:00–17:00 uur

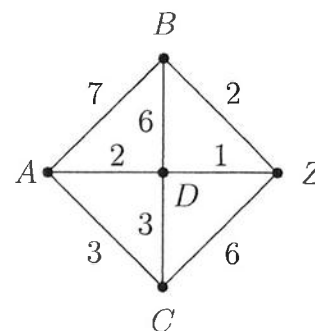


Geef korte, duidelijke toelichting. Cijfers: www.liacs.leidenuniv.nl/~kosterswa/AI/res.html.

Opgave 1: A*/IDA* (20 punten)

a. (6 punten) Leg het A*-*algoritme* en het IDA*-*algoritme* uit. Geef de verschillen duidelijk aan. Geef expliciet de formule voor f (wat stellen g en h voor?) en denk aan de stop-conditie.

b. (3 punten) We bekijken nevenstaande *ongerichte* graaf. We beginnen in A , en doelknoop is Z , waarbij we in ieder geval B en/of C bezocht moeten hebben. Een toestand wordt vastgelegd door de locatie én of we in B en/of C zijn geweest. Geef de best mogelijke admissibele heuristiek h voor de acht toestanden.



c. (4 punten) We definiëren $h' = h$, behalve dat de twee heuristische waarden die bij D horen op 0 worden gezet. Voer het A*-*algoritme* uit voor deze h' . Gebruik zonodig de *pathmax equation*. Geef duidelijk aan hoe het algoritme verloopt, en in welke volgorde de knopen ontwikkeld worden. Indien er hierbij keuzes mogelijk zijn, geef ze dan allemaal.

d. (3 punten) We definiëren nu $h'' = h$, behalve dat de twee heuristische waarden die bij A horen op 0 worden gezet. Voer het IDA*-*algoritme* voor deze h'' .

e. (4 punten) De heuristiek h' van c is niet *consistent*. Leg dit begrip uit. Als je de heuristische waarden bij D mag veranderen om de heuristiek h' consistent te maken, welke mogelijkheden zijn er dan?

Opgave 2: α - β -algoritme (25 punten)

Bekijk het volgende tweepersoons kaartspel, gespeeld door Rood en Zwart. Voor de *kansversie* wordt eerst een eerlijke munt opgegooid om te bepalen wie er begint. Op tafel liggen van iedere soort (klaveren (K, ♣; zwart), ruiten (R, ♦; rood), harten (H, ♥; rood) en schoppen (S, ♠; zwart)) de waarden 2, 3 en 5: in totaal twaalf kaarten.

Als Rood begint, worden de drie ♦-kaarten verwijderd; als

Zwart begint, de drie ♣-kaarten; er liggen dan dus nog negen

kaarten. De beginspeler kiest een kaart van zijn eigen kleur

(rood of zwart), en daarna doet de andere speler dat ook. De

tweede speler moet een andere waarde kiezen dan de eerste.

	2	3	5
♣	Zwart	Zwart	Rood
♦	Rood	Rood	Zwart
♥	Zwart	Rood	Zwart
♠	Rood	Zwart	Rood

De winnaar wordt bepaald door de kaart waarvan soort en waarde niet gekozen zijn, volgens de tabel. De waarde van die kaart bepaalt het aantal punten waarmee men wint.

In de *gewone versie* mag Rood bepalen wie er begint. Dit kost hem echter 1 punt.

Een voorbeeld voor de kansversie: stel dat Rood mag beginnen; de ♦-kaarten worden verwijderd. Rood kiest ♥-3. Daarna kiest Zwart ♣-5. Nu bepaalt ♠-2 de uitslag: Rood wint met 2 punten. (In de gewone versie zou Rood met 1 punt winnen!)

a. (6 punten) Beschrijf in woorden het *expecti-minimax-algoritme*. Wat doet het algoritme in max-knopen, min-knopen, kansknopen, bladeren, ...?

b. (7 punten) Maak de spelboom en bereken expecti-minimax-waarde voor de kansversie. Hint: de boom heeft 24 bladeren.

c. (2 punten) Bereken minimax-waarde voor de gewone versie. Tip: gebruik b.

- d. (4 punten) Rood mag in de tabel één keer “Zwart” door “Rood” vervangen. Welke van de twee kiest hij/zij bij de kansversie en welke bij de gewone versie, en waarom?
- e. (6 punten) Nu begint Zwart; er zijn 12 bladeren in de spelboom. Voer het α - β -*algoritme* uit. Zorg ervoor dat de ordening van de knopen zo is dat er *precies één maal* gesnoeid kan worden. Geef een korte rechtvaardiging voor het snoeien.

Opgave 3: ID3-algoritme & Neurale netwerken (20 punten)

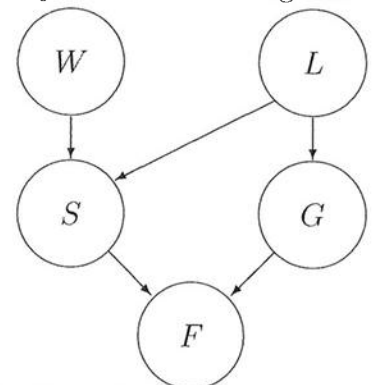
We beoordelen of het weer geschikt is om te vissen, op grond van situaties uit het verleden:

	helder	warm	droog	vissen
1	+	+	ja	—
2	+	+	nee	—
3	±	—	ja	—
4	—	—	nee	+
5	±	+	ja	+

- a. (8 punten) Leg het ID3-*algoritme* uit. Onderscheid hierbij vier gevallen voor de knopen: geen voorbeelden meer (wat gebeurt er dan?), ... Geef de benodigde formules, waaronder die voor de entropie $H(p, n)$ in geval van p positieve en n negatieve gevallen; en die voor de entropie na afloop van het splitsen op een attribuut met ν waardes.
- b. (8 punten) Voer het ID3-*algoritme* uit voor bovenstaande database. Gebruik hierbij $-\frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} \approx 0.9$.
- c. (4 punten) We laten **helder** weg. Geef vier elkaar niet tegensprekende situaties waarbij een perceptron het probleem *wel* kan leren, en vier situaties waarbij dat *niet* kan. Leg uit.

Opgave 4: Bayesiaanse netwerken (20 punten)

We hebben een *Bayesiaans netwerk* met vijf knopen: W (weer), S (stemming), F (feest), L (loterij) en G (geld), zie hiernaast. Gebruik de vertrouwde notatie: kleine letters staan voor het waar zijn van de variabele met de bijbehorende hoofdletter.



- a. (3 punten) Hoeveel en welke kansen moeten gegeven zijn?
- b. (7 punten) Nu is S een *noisy-or* knoop. De kanstabel voor S kan dan met twee getallen, zeg p en q , geparametriseerd worden. Leg dit uit, en geef aan hoe die kanstabel eruit ziet.
- c. (4 punten) Geef de vier soorten queries, en van elk een voorbeeld uit het netwerk.
- d. (6 punten) Druk de kans dat we geld hebben, gegeven dat we geen feest vieren terwijl we wel de loterij hebben gewonnen, uit in bekende kansen.

Opgave 5: Theorie (diversen) (15 punten)

- a. (10 punten) We bekijken een *Stofzuigerwereld* waarin drie aangrenzende kamers A , B en C zijn waarvan precies één van A en B vies is, en C schoon.

A	B	C
-----	-----	-----

 De stofzuiger kan met het commando RECHTS van A naar B of van B naar C (het commando RECHTS doet niets in C); met het commando LINKS uiteraard andersom. Het commando WERK laat de stofzuiger stof zuigen.

Geef een gedeelte van de bijbehorende *toestand-actie-ruimte met beliefs states*, dat in ieder geval de begintoestand bevat én een pad naar een doeltoestand waarin alle kamers schoon zijn. Leg ook uit wat beliefs states zijn.

- b. (5 punten) Welke stappen doet een *Genetische Algoritme*, en in welke volgorde? Leg de stappen kort uit.

Retake Exam – Lineaire Algebra 2

5 July 2016

Time: 3 hours.

Fill in your name and student number on all papers you hand in.

In total there are 6 question, and each question is worth the same number of points.

In all questions, justify your answer fully and show all your work.

In this examination you are only allowed to use a pen and examination paper.

Question 1

To answer this question, you will need the extra sheet. Please write your answers to this question on that sheet (you can use the back if you need it). Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear transformation given by the matrix A (so that the standard matrix of T is A). Draw the image of the rectangle in figure (a) on the extra sheet under the linear transformation T . You should draw your answer on the same figure.
- b) Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear transformation given by the matrix B (so that the standard matrix of T is B). Draw the image of the triangle in figure (b) on the extra sheet under the linear transformation T . You should draw your answer on the same figure.
- c) Write a 2×2 matrix C so that the linear transformation $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with standard matrix T sends the triangle in figure (c) to the triangle in figure (d). You should write your answer on the extra sheet.

Question 2

For each of the following 5 statements, say whether the statement is true or false. Justify your answer (either by an example if the statement is false, or a brief proof if it is true).

- a) If A , B and C are $n \times n$ matrices with A not the zero matrix, and such that $AB = AC$, then $B = C$.
- b) The function $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sending (x, y) to $(x + y, x + 1)$ is linear.
- c) If an $n \times n$ matrix A has 0 as an eigenvalue, then the null space of A is non-zero.
- d) If a finite-dimensional vector space V contains 4 linearly independent vectors, then $\dim V \geq 4$.
- e) If $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ are injective functions then the composite $T \circ S$ is also injective.

Question 3

Let the matrix A and the vector $\underline{b}$ be given by

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Find a solution to the system $A\underline{x} = \underline{b}$.
- Use the Gram-Schmidt process to turn the columns of A into an orthogonal set.

Question 4

Let A be the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Find the eigenvalues of A .
- For each eigenvalue in (a) give a basis for the corresponding eigenspace.

Question 5

Exactly one of the following sets of vectors in $\mathbb{R}^3$ spans the whole of $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Which of the sets S_1, S_2 spans the whole of $\mathbb{R}^3$?
- For the set which spans the whole of $\mathbb{R}^3$, find a subset of it which is a basis of $\mathbb{R}^3$.

Question 6

Let A be an invertible $n \times n$ matrix.

- Show that 0 is not an eigenvalue of A .
- Let $\underline{v}$ be an eigenvector of A with eigenvalue λ . Show that $\underline{v}$ is an eigenvector of A^{-1} with eigenvalue λ^{-1} .
- Let B and P be $n \times n$ matrices with P invertible and with $B = PAP^{-1}$. Suppose $\underline{v}$ is an eigenvector for A with eigenvalue λ . Show that $P\underline{v}$ is an eigenvector for B with eigenvalue λ .

Hertentamen Inleiding Kansrekening

4 juli 2016, 14:00–17:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit hertentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen. Elke vraag is een aantal punten waard, dat vetgedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

(1) [**R**]

- (a) [**5**] Waar moet een gebeurtenis A aan voldoen opdat die onafhankelijk van zichzelf is?
- (b) [**5**] Gegeven zijn twee gebeurtenissen A en B met $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$ en $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$. Geef de beste ondergrens voor $\mathbb{P}(A \cap B^c)$.

(2) [**T**] Zij X de $\mathbb{N}$ -waardige stochast met kansmassafunctie

$$p_X(n) = \begin{cases} C, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{1}{2}C, & N < n \leq 2N, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**5**] Bereken C .

(b) [**5**] Bereken $\mathbb{E}(X \mid X > N)$. ✖

(3) [**T**] Zij X de $(0, \infty)$ -waardige stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx, & x \in (0, 10), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) [**5**] Bereken C .

(b) [**5**] Bereken de moment-genererende functie van X .

- (4) [T] Zij (X, Y) het paar $(0, \infty)$ -waardige stochasten met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C|x^{-1} - y^{-1}|, & x, y \in [1, 2], \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waar $C^{-1} = 2(\log 2 - 1)$.

- (a) [7] Bereken $f_Y(y)$.
 (b) [8] Bereken $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.
- (5) [T] Zij U de uniform verdeelde stochast op $[-2, 2]$.
 (a) [7] Bereken de kansdichtheidsfunctie van de stochast $V = U^3$.
 (b) [8] Bereken $\mathbb{E}(V \mid V > 0)$.
- (6) [R] Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2\}$, startverdeling $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- (a) [7] Bereken $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.
 (b) [8] Bereken $\mathbb{P}(X_0 = 1 \mid X_2 = 1)$.
- (7) [R] Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- * (a) [5] Is X irreducibel? Is X aperiodiek?

(b) [5] Heeft X een unieke stationaire kansverdeling π ? Zo ja, wat is die?

- (8) [I] Zij $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke, identiek verdeelde, $\mathbb{R}$ -waardige stochasten met gemiddelde $\mu \in \mathbb{R}$ en variantie $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Voor $n \in \mathbb{N}$, zij $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ het empirisch gemiddelde van de eerste n stochasten.

- (a) [7] Hoe luidt de zwakke wet van de grote aantallen voor $\bar{X}_n$, $n \rightarrow \infty$?
 (b) [8] Geef het bewijs van deze wet met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev.

Final Exam “Analyse 4”

Monday, July 4, 10.00 – 13.00

- Write your name and student ID number on every page.
 - Clear your table completely leaving only a pen and a non-graphical calculator.
 - This exam has *five* problems. Do not forget the problems on the back.
-

1. (14 points) Given is a function $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ with

$$v(x, y) = 2y^3 - 6x^2y + \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

- (a) Show that v is harmonic.
- (b) Find a function $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that the complex function

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

is holomorphic. Is u unique? Motivate your answer.

- (c) The function f from (b) is given as a function of x and y . Write it as a function of $z = x + iy$.

2. (23 points) Let $a \in \mathbb{C}$ be such that $|a| < 1$ and let n be a natural number with $n \geq 1$. Furthermore, define the function $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by

$$f(z) = (z - 1)^n e^z - a$$

and let $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

- (a) Show that for any zero z of f in H it holds true that $|z - 1| < 1$.
- (b) How many zeros (counted with multiplicity) does f have in H .
- (c) How many *different* zeros does f have in H .

3. (17 points)

- (a) State and prove Liouville's theorem on bounded, entire functions.
- (b) Let $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be holomorphic functions and assume that there is $M \geq 0$ such that $|f(z)| \leq M|g(z)|$ for all $z \in \mathbb{C}$. Assume further that g has no zeros in $\mathbb{C}$. Show that there is a constant C such that $f(z) = Cg(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.
- (c) Let $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be holomorphic functions and assume that there is $M \geq 0$ such that $|f(z)| \leq M|g(z)|$ for all $z \in \mathbb{C}$. Show that there is a constant C such that $f(z) = Cg(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.

4. (28 points)

(a) Consider

$$f(z) = \frac{(e^{iz} - 1)(1 - \cos(2z))}{z^4 \sinh(z)}$$

on its natural domain of definition in the complex plane.

(Hint: Recall that $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$.)

- i. Determine all singularities of f and their type, that is, distinguish between removable singularities, poles or essential singularities. For poles, also specify their order.
 - ii. Determine the principal part of the Laurent series around $z = 0$.
- (b) Let $n \in \mathbb{N}$ and $g_n : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z^2 + 1)^{-n}$.

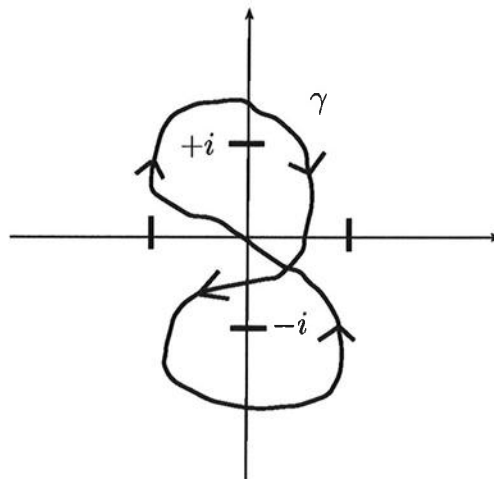
i. Show that

$$\text{Res}(g_n, \pm i) = \mp i \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

ii. Determine the value of the complex line integral

$$\oint_{\gamma} g_n(z) dz,$$

where the curve γ is given below.



5. (18 points) Use residue calculus to compute the value of the definite integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} \cos(\mu x) dx \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

(Hint: You may use that $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \exp(\alpha R \sin(t)) dt = 0, \alpha < 0$.)

Resit - RED - July 1, 2016 - 14:00-17:00

Problem 1. Time dilation [total: 2 points]

The average lifetime of a π meson in its own frame of reference is $2.6 \cdot 10^{-8}$ s. (This is its proper lifetime)

- a. [0.5 point] If the π meson moves with speed $0.95c$ with respect to the Earth, what is its lifetime as measured by an observer at rest on Earth?
- b. [0.5 points] What is the average distance it travels before decaying as measured by an observer at rest on Earth?

The half-life (i.e. the time required for the decaying quantity to fall to one half of its initial value) of a π meson at rest is $2.5 \cdot 10^{-8}$ s. A beam of π mesons is generated with velocity $v = \sqrt{4/5}c$ at a point d from a detector (as measured in the lab frame). Only half of the π mesons are observed to survive and reach the detector.

- c. [1 point] Find the distance d to the detector.

Problem 2. Potentials and Fields of a moving magnetic dipole - [total: 3 points]

An ideal magnetic dipole is at rest at the origin in system $\mathcal{S}_0$. The components of the corresponding vector potential is

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3}, \quad (1)$$

while the electric potential V_0 is zero. [Where 0 here indicates the frame, not components]. Frame $\mathcal{S}$ moves with speed v in the *negative* x direction with respect to inertial system $\mathcal{S}_0$, (i.e. $\mathbf{v} = -v\hat{x}$). Their origins coincide at $t = 0$.

- a. [0.5 points] Write the Lorentz transformation matrix relating frame $\mathcal{S}$ to frame $\mathcal{S}_0$, in terms of $\beta = v/c$ and $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. [Be careful with the direction of the velocity]
- b. [1.5 points] Apply the matrix from the previous question to the four-vector potential $(V_0/c, \mathbf{A}_0)$ and find the vector potential in system $\mathcal{S}$, $(V/c, \mathbf{A})$. Now focus on the electric potential, V , and express its components in terms of the coordinates of $\mathcal{S}$. As a result you should get that the electric potential V of a magnetic dipole that moves with constant velocity v along the x -axis (i.e. $\mathbf{v} = v\hat{x}$) and passes through the origin at $t = 0$ is

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{R}) (1 - \beta^2)}{c^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}. \quad (2)$$

where $\mathbf{R} = (\gamma(x - vt), y, z)$.

- c. [1 point] Take the non relativistic limit ($v^2 \ll c^2$) in the expression for the electric potential in system $\mathcal{S}$. Using the rule $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ simplify its expression. You should get an expression characteristic of the electric potential of an *electric* dipole $\mathbf{p}$; identify $\mathbf{p}$ in terms of $\mathbf{m}$ and $\mathbf{v}$.
- d. [bonus question valid 1 point, only after you have reached 6/10]

Using $\mathbf{E}_0 = -\nabla V_0 - \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t_0}$ and $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$ find the electric and magnetic field in system $\mathcal{S}_0$ (where ∇ here is meant in terms of the coordinates of $\mathcal{S}_0$).

**Problem 3. Field tensor of a capacitor and its Lorentz transformation -
[total: 3.5 points]**

A parallel plate capacitor is at rest in system $\mathcal{S}$, where it is tilted at an angle ϕ with the x -axis, in the xy plane, and its plates are parallel to the z axis. The plates width is w , the length is l , the separation is d and they carry a charge density of σ and $-\sigma$ as shown in the Figure 1.

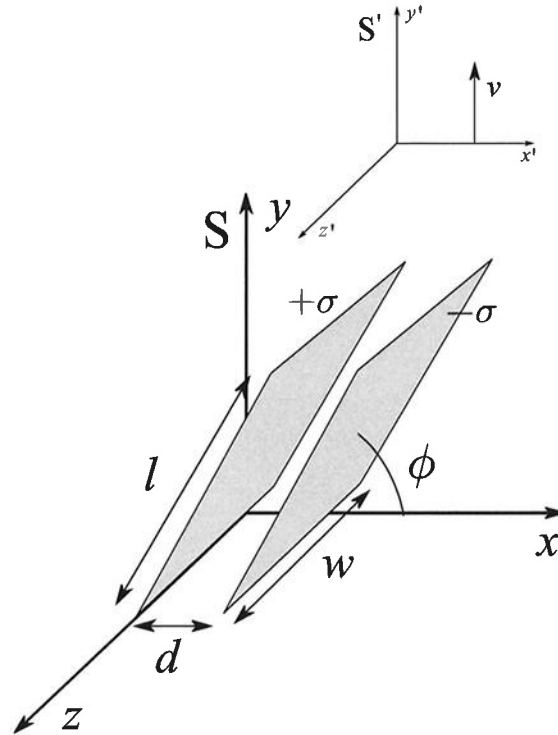


Figure 1: Tilted parallel plate capacitor at rest in system $\mathcal{S}$.

- a. [1 point] Write the field tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

generated by the capacitor in system $\mathcal{S}$.

Inertial system $\mathcal{S}'$ moves at constant velocity in the positive y direction, $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{y}}$, with respect to $\mathcal{S}$. Their axes are parallel to one another, and their origins coincide at $t = t' = 0$.

- b.** [0.5 points] Write the Lorentz transformation matrix relating frame $\mathcal{S}'$ to frame $\mathcal{S}$, in terms of $\beta = v/c$ and $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
- c.** [1 point] Apply the Lorentz transformation to the field tensor $F^{\mu\nu}$ to find $(F')^{\mu\nu}$, the field tensor in $\mathcal{S}'$. [Hint: the transformation law for tensors reads $(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$, where Λ^μ_α is the entry in row μ and column α of the matrix above. Exploit the antisymmetry of the field tensor to minimize calculations.]
Write $\mathbf{E}'$ and $\mathbf{B}'$.
- d.** [1 point] Find the length, width and orientation of the plates in the moving frame $\mathcal{S}'$.

Problem 4. Tensor notation and invariant combinations - [total: 2 points]

- a. [1 point] The following quantities, constructed solely with the field tensor and its dual tensor, are *invariant* under Lorentz transformation:

- $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
- $F^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$

Using

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & -B_z & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

express them in terms of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$. [Remember that when lowering or raising a 0 index, you need to switch the sign, e.g. $F^{02} = -F_{02}$]

Then answer to the following questions:

- b. [0.5 points] Can a purely electric field in one inertial system be seen as a purely magnetic field in another?
- c. [0.5 points] Can a progressive wave be seen as a purely electric or purely magnetic field in another inertial system?

Tentamen Klassieke Mechanica a , 1 juli 2016 , 14u00 – 17u00

Let op – lees onderstaande goed door!

Het tentamen bestaat uit **5** opgaven, onder de laatste staat 'Einde'. Het totaal aantal te behalen punten is **44**, het aantal voor de individuele onderdelen is aangegeven. Er mag geen elektronische apparatuur gebruikt worden. Noteer het antwoord op meerkeuze vragen op je uitwerkingsblad, en *niet* op het opgaveblad.

- Maak iedere opgave op een **apart blad**, omdat opgaven ieder apart worden nagekeken.
- Schrijf op ieder blad je **naam** en **studentnummer**.
- Alle **telefoons** moeten **uit** staan, in je **tas/jas** zitten, en mogen tijdens het tentamen niet tevoorschijn worden gehaald.
- Schrijf duidelijk en werk overzichtelijk. Kladpapier wordt niet nagekeken.
- Bij constatering van **fraude** wordt de student van verdere deelname aan het tentamen uitgesloten. Dit zal tevens aan de examencommissie worden doorgegeven.

VEEL SUCCES!

Opgave 1. (divers. $5 \times 2 = 10$) Noteer telkens het beste antwoord, en geef een korte motivatie

- (1) Je laat een steen van 2 kg van een hoogte van 20 m op de grond vallen. Wat kun je zeggen van de kracht die de steen uitoefent op de grond bij het raken. Is die
(a) 10 N ; (b) 20 N ; (c) 40 N ; (d) 200 N ; (e) onbepaald
 - (2) Een blokje klei wordt tegen een (wrijvingsloos opgesteld) blok lood gegooid dat op dat moment in rust is. De klei blijft daaraan vast zitten. Vergeleken met het loodblok heeft het kleiblok na de botsing
(a) meer impuls maar minder kinetische energie; (b) meer impuls en meer kinetische energie;
(c) minder impuls en minder kinetische energie; (d) minder impuls maar meer kinetische energie; (e) geen van allen.
 - (3) Beschouw een steen op een draaiende schijf met assen zoals hiernaast getekend. De schijf ondergaat nu een continue vertraging. Geef de richting van de *tangentiele* versnelling van de steen. Die is :
(a) langs +x ; (b) langs -x ; (c) langs +y ; (d) langs -y ; (e) gelijk aan nul.
-
- (4) Een ring met straal R en massa m draait om een as door het midden van de ring en loodrecht op het vlak van de ring. De ring draait met hoeksnelheid ω_1 en heeft daardoor energie E_1 . Nu wordt een kogeltje met massa $m/2$ aan de ring bevestigd. Als de ring weer met ω_1 draait is de energie E_2 . Er geldt :
(a) $E_2 = \frac{1}{2} E_1$; (b) $E_2 = \sqrt{3/2} E_1$; (c) $E_2 = 3/2 E_1$; (d) $E_2 = \sqrt{5/4} E_1$; (e) $E_2 = 2 E_1$
 - (5) Een deeltje met massa m beweegt in een rechte lijn, in een Cartesisch stelsel beschreven door $x = b, y = b, z = ct$, met b en c constanten (c is ongelijk nul) en t de tijd. Geef aan welke van de volgende uitspraken juist zijn (*meerdere* mogelijk), steeds over het impulsmoment $\mathbf{L}$ van het deeltje ten opzichte van de oorsprong:
(a) $\mathbf{L}$ is ongelijk nul voor alle waarden van b .
(b) $\mathbf{L}$ is constant in de tijd en hangt van b af.
(c) Het deeltje beweegt rechtlijnig, dus $\mathbf{L}$ is nul.
(d) De waarde van $\mathbf{L}$ verandert met t en hangt van b en c af.
(e) De waarde van $\mathbf{L}$ wordt gegeven door het product van de positievector van het deeltje en de component van de snelheid loodrecht daarop.

Opgave 2. (impulsbehoud, 2+2+1+1+2 = 8)

Deeltje 1 met massa m en snelheid v_1 botst in 1 dimensie tegen deeltje 2 met massa M dat stil staat. De botsing is elastisch.

- Bereken de verandering van de impuls van deeltje 1 als $m = M$.
- Bereken de verandering van de impuls van deeltje 1 als $m \ll M$.
- Laat voor geval (a) zien dat, na de botsing, deeltje 1 minder kinetische energie heeft dan deeltje 2.
- Laat voor geval (b) zien dat, na de botsing, deeltje 2 minder kinetische energie heeft dan deeltje 1.
- Blijkbaar is er een omslagpunt als functie van de verhouding $\alpha = M/m$. Bereken bij welke waarde voor α beide deeltjes dezelfde kinetische energie hebben. *Je hebt geen rekenmachine, schat eventuele wortels.*

Opgave 3. (oscillatoren, 2+3+2+3= 10)

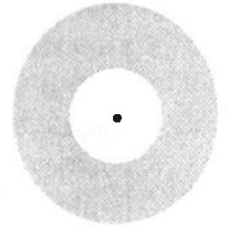
De aantrekkingskracht tussen twee atomen die samen een molecuul vormen wordt vaak beschreven met de zogenoemde Lennard-Jones potentiaal, hier in 1 dimensie :

$$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{x_0}{x} \right)^6 \right], \text{ met } x_0 \text{ de evenwichtsafstand}$$

- Laat met een Taylorexpanctie rond evenwicht zien dat de kracht tussen de atomen voor kleine uitwijking leidt tot een lineaire teruggedrijvende kracht.
- De twee atomen (1 en 2) hebben massa's m_1 en m_2 . Beschouw het molecuul als een massa-veer systeem waarbij in trilling beide atomen versnellen en vertragen ten opzichte van het evenwichtspunt. Laat met de 3^e wet van Newton zien dat de *relatieve* versnelling a_{rel} van 2 t.o.v. 1 gegeven wordt door $a_{\text{rel}} = (m_1 / \mu) a_1$, met $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ de gereduceerde massa. Geef a_{rel} ook in termen van a_2 .
- Geef nu de trillingsfrequentie ω van het molecuul in termen van V_0 , x_0 en μ .
- Het massa-veer systeem hierboven heeft een karakteristieke frequentie ω . Geef een algemene uitdrukking voor de uitwijking van de massa als functie van de tijd. Gebruik ω , en als vrije parameters een maximale uitwijking A en een fase ϕ . Bereken met deze uitdrukking de *gemiddelde* kinetische energie van de massa μ in één periode.

Opgave 4. (traagheidsmomenten, 2+1+2+3+2 = 10)

- Laat zien dat het traagheidsmoment voor een dunne schijf met massa m en straal a om een as door het middelpunt en loodrecht op de schijf (de z -as), gegeven wordt door $I_z = \frac{1}{2} m a^2$.
- De schijf roteert met een hoeksnelheid ω . Geef het impulsmoment L en de kinetische energie K in termen van ω , m en a .
- Hoe verder van de as van de roterende schijf, hoe meer de massa bijdraagt aan de kinetische energie. Uit de schijf wordt een kleinere schijf met straal $a/2$ en hetzelfde middelpunt verwijderd (zie plaatje). Bereken wat de fractie van de nieuwe kinetische energie is ten opzichte van die van de complete schijf.



Beschouw nu een bol met straal R en massa m , opgehangen aan een massaloze draad met lengte ℓ . De bol kan vrij draaien om de as gegeven door de draad.

- Laat zien dat het traagheidsmoment I_z van de bol om de as van de draad gegeven wordt door $I_z = \frac{2}{5} m R^2$. Maak hierbij gebruik van (a)
- Nu gaat de bol slingeren om een as door het ophangpunt van de draad, en loodrecht daarop (de x -as). Bereken I_x .



Opgave 5. (roterende assenstelsels, 2+1+3 = 6)

Voor formule niet-inertiaalstelsels en plaatje, zie begrippenblad

- Een draaischijf met straal b roteert met hoeksnelheid ω om een verticale as door het middelpunt. Een wandelaar met massa m loopt langs een cirkel op $b/2$ tegen de draairichting, met zodanige snelheid dat hij stilstaat voor een externe waarnemer. Welke kracht werkt er op de wandelaar volgens de externe waarnemer? en welke kracht volgens een waarnemer die in de oorsprong met het coördinatenstelsel meedraait?

Beschouw een lokaal coördinatensysteem met als oorsprong O' het oppervlak van de aarde (draaiend met een hoeksnelheid ω) op noorderbreedte λ . De x' -as wijst naar het oosten, de y' -as naar het noorden, de z' -as omhoog, zie het plaatje op het begrippenblad.

- Teken de cirkel waar noordpool, zuidpool en O' op liggen. Teken in O' de vector ω en de componenten van ω langs y' en z' . Doe hetzelfde voor een O' op zuiderbreedte λ .
- In dit systeem heeft een object een constante snelheid v in oostelijke richting (dus langs x'). Bereken de componenten van $\omega \times v'$ en geef daarmee aan welke componenten de Corioliskracht heeft: omhoog (z') / omlaag ($-z'$) en/of noord (y') / zuid ($-y'$), voor de gevallen $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.

Begrippen en formules

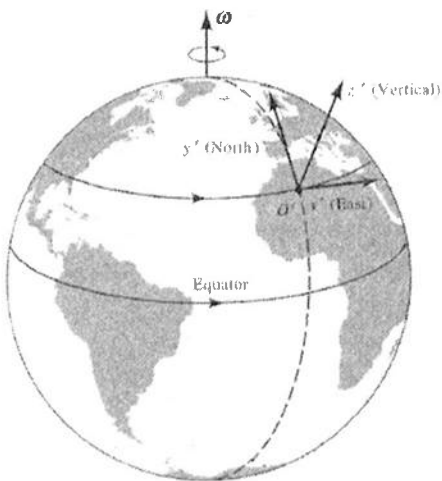
engels	nederlands	
momentum	impuls	ook 'hoeveelheid van beweging'
angular momentum	impulsmoment	ook 'draai-impuls', 'hoekmoment'
moment of force	krachtmoment	ook 'torque'(E) ; 'moment', 'draaimoment' (N)
moment of inertia	traagheidsmoment	

De formule voor de beweging van een deeltje in een niet-inertiaalsysteem :

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}'$$

met alle 'geaccentueerde' grootheden gemeten in het bewegende assenstelsel. $\mathbf{F}$ is een echte kracht, $\mathbf{A}_0$ is de versnelling van het bewegende assenstelsel, $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheid van het bewegende assenstelsel. Je moet weten hoe de verschillende termen heten.

Plaatje voor opgave 5.



--- EINDE ---

