Uitwerkingen Tentamen Logica voor Informatici, 19 december 2000

Vraag 1 Op de vraag “Wat is het geheim van uw lange leven?” antwoordde 100-jarige Jan: “Bij iedere maaltijd houd ik me aan de volgende drie dieetregels:

i. Als ik geen bier drink, dan neem ik soep.

ii. Als ik soep eet en bier drink, dan neem ik ijs toe.

iii. Als ik ijs eet of geen bier drink, dan sla ik de soep over.”

Drinkt Jan bij iedere maaltijd bier? Neemt Jan bij iedere maaltijd soep? Bepaal het antwoord op deze vragen met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).
Antwoord:
We voeren de volgende schematische letters in: De letter b voor ‘Ik drink bier’, de letter s voor ‘Ik eet soep’ en de letter y voor ‘Ik eet ijs’. Dus i-iii vertalen we als

i. $\neg b \to s$

ii. $(s \wedge b) \to y$

iii. $(y \vee \neg b) \to \neg s$.

b	s	y	$\{i\}$	$\{i, ii\}$	$\{i, ii, iii\}$
1	1	1	ja	ja	nee
1	1	0	ja	nee	–
1	0	1	ja	ja	ja
1	0	0	ja	ja	ja
0	1	1	ja	ja	nee
0	1	0	ja	ja	nee
0	0	1	nee	–	–
0	0	0	nee	–	–

Er zijn dus twee waarderingen V die een model zijn voor de vier formules (101 en 100). In beide waarderingen is $V(b) = 1$ en $V(s) = 0$. Dus, Jan drinkt bij iedere maaltijd bier en neemt géén soep.

Vraag 2 Geef reductieregels voor het binaire connectief $\varphi \oplus \psi$ (dit is “exclusive or”: óf φ óf ψ).
Laat dan met behulp van een semantisch tableau zien
dat de formule $(p \oplus q) \to (p \to \neg q)$ een tautologie is.
Antwoord op het eerste gedeelte van de vraag:
We weten dat $\varphi \oplus \psi \equiv \varphi \leftrightarrow \neg\psi$. Dus voor het bepalen van het effect van een voorkomen van $\varphi \oplus \psi$ in een sequent van een semantisch tableau kunnen we met $\varphi \leftrightarrow \neg\psi$ werken.

Het effect van een linker voorkomen:

$$\Phi, \varphi \leftrightarrow \neg\psi \circ \Psi$$

$\leftrightarrow_L$

$$\Phi, \varphi, \neg\psi \circ \Psi \qquad \Phi \circ \varphi, \neg\psi, \Psi$$

$\neg_L$ $\neg_R$

$$\Phi, \varphi \circ \psi, \Psi \qquad \Phi, \psi \circ \varphi, \Psi$$

Samengevat krijgen we voor de linker $\oplus$-reductieregel:

$$\Phi, \varphi \oplus \psi \circ \Psi$$

$\oplus_L$

$$\Phi, \varphi \circ \psi, \Psi \qquad \Phi, \psi \circ \varphi, \Psi$$

Voor de rechter $\oplus$-reductieregel gaan we analoog te werk:

$$\Phi \circ \varphi \leftrightarrow \neg\psi\Psi$$

$\leftrightarrow_R$

$$\Phi, \phi \circ \neg\psi, \Psi \qquad \Phi, \neg\psi \circ \varphi, \Psi$$

$\neg_R$ $\neg_L$

$$\Phi, \varphi, \psi \circ \Psi \qquad \Phi \circ \varphi, \psi, \Psi$$

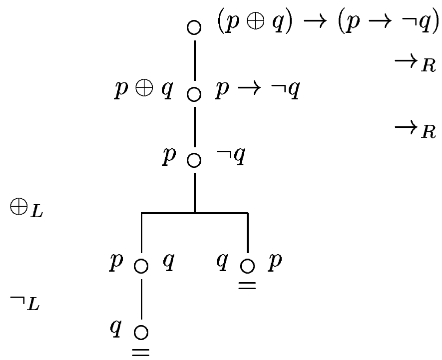
Uit bovenstaande lezen we de rechter $\oplus$-reductieregel af:

$$\Phi \circ \varphi \oplus \psi, \Psi$$

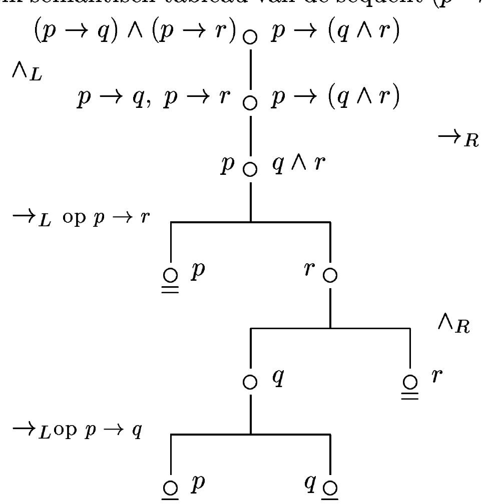
$\oplus_R$

$$\Phi, \varphi, \psi \circ \Psi \qquad \Phi \circ \varphi, \psi, \Psi$$

Antwoord op het tweede gedeelte van de vraag:
Een semantisch tableau voor $\circ\ (p \oplus q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$:



Vraag 3 Uit $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ volgt $p \rightarrow (q \wedge r)$.
Toon dat aan door middel van een semantisch tableau.
Antwoord:
Intuitief is het duidelijk dat genoemde gevolgtrekking geldig is. We weten dus dat elk semantisch tableau van de sequent $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\ \circ\ p \rightarrow (q \wedge r)$ sluit.



Vraag 4 Bewijs met natuurlijke deductie, zonder bekende wetten te gebruiken:
a) $(p \wedge q) \vee r \vdash (r \to p) \to p$
Antwoord:
Laat $\varphi = (p \wedge q) \vee r$.

1.	$(p \wedge q) \vee r$	uit φ	aanname; te bew.: $(r \to p) \to p$
2.	$r \to p$	uit $r \to p$	aanname; te bew.: p
3.	r	uit r	aanname; te bew.: p
4.	p	uit $r \to p, r$	$\to$E(2,3)
5.	$p \wedge q$	uit $p \wedge q$	aanname; te bew.: p
6.	p	uit $p \wedge q$	$\wedge$E(5)
7.	p	uit $\varphi, r \to p$	$\vee$E(1,4,6)
8.	$(r \to p) \to p$	uit φ	$\to$I(7)

Merk op dat je regels 2. tot en met 7. kunt aanmerken als een subbewijs (voor de toepassing van $\to$I). Evenzo regels 3. tot en met 4. en ook regels 5. tot en met 6. (voor de toepassing van $\vee$E).

b) $\vdash (p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$
Antwoord:

1.	$p \wedge \neg q$	uit $p \wedge \neg q$	aanname; te bew.: $\neg(p \to q)$
2.	$p \to q$	uit $p \to q$	aanname; we gaan $p \to q$ weerleggen
3.	p	uit $p \wedge \neg q$	$\wedge$E(1)
4.	q	uit $p \to q, p \wedge \neg q$	$\to$E(2,3)
5.	$\neg q$	uit $p \wedge \neg q$	$\wedge$E(1);tegenspraak: we gaan $p \to q$ intrekken
6.	$\neg(p \to q)$	uit $p \wedge \neg q$	$\neg$I(4,5)
7.	$(p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$	uit $\emptyset$	$\to$I(6)

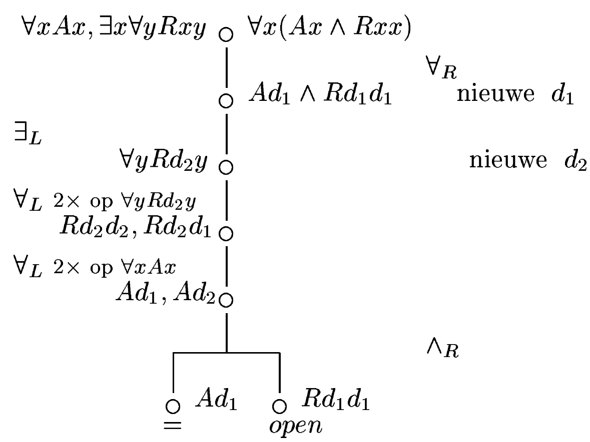
Merk op dat regels 1. tot en met 6. een subbewijs vormen (voor de toepassing van $\to$I). Zo ook regels 2. tot en met 5. (voor de toepassing van $\neg$I).

Vraag 5 Beschouw het domein der mensen, met de volgende twee predikaten: Oxy betekent dat x een ouder van y is, en Vx betekent dat x een vrouw is. Verder zijn j, a en m constanten die staan voor Jan, Ans en Marie.
Schrijf nu ieder van de volgende zinnen als formule van de predikaatlogica:
a) Ans en Marie zijn vrouwen, maar Jan niet.
b) Jan en Marie hebben dezelfde moeder.
c) Jan en Ans hebben een dochter die een dochter heeft.
d) Iedere dochter van Jan en Ans heeft een zoon.

Antwoord:
a) $Va \wedge Vm \wedge \neg Vj$
b) $\exists x(Oxj \wedge Oxm \wedge Vx)$
c) $\exists y(Ojy \wedge Oay \wedge Vy \wedge \exists z(Oyz \wedge Vz))$
d) $\forall y((Ojy \wedge Oay \wedge Vy) \to \exists z(Oyz \wedge \neg Vz))$

Vraag 6 Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is: uit $\forall x Ax$ en $\exists x \forall y Rxy$ volgt dat $\forall x(Ax \wedge Rxx)$.

Antwoord:
Opmerking: Het is duidelijk dat de gevolgtrekking *niet* juist is: je hoeft slechts een model te beschouwen waar elk der elementen de eigenschap A heeft en bovendien er een uitverkoren element u bestaat met de eigenschap dat voor elk element a er een pijltje uit u vertrekt en in a aankomt (dit geldt ook voor het uitverkoren element: er vertrekt een pijltje uit u naar zichzelf). Verder is het zo dat er minstens één element a ($\neq u$) is waaruit *geen* pijltje vertrekt naar zichzelf. In een model dat aan bovenstaande beschrijving voldoet zal de interpretatie van de formules $\forall x Ax$ en $\exists x \forall y Rxy$ waar zijn en de interpretatie van de formule $\forall x(Ax \wedge Rxx)$ niet waar zijn. We zullen dit feit herontdekken door gebruik te maken van een formele methode, nl. semantische tableaux.
Einde Opmerking.

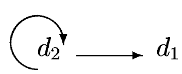


Merk op dat voor alle universele formules aan de linkerkant van een sequent de reductieregel $\forall_L$ is toegepast op alle elementen van het domein (d_1 en d_2). Als dit niet is gebeurd, mag het tableau nog niet getermineerd worden. De andere, analoge, eis is dat voor alle existentiele formules aan de rechterkant van een sequent de reductieregel $\exists_R$ is toegepast op alle elementen van het domein; maar dergelijke formules zijn er hier niet.

In het algemeen geldt dat op elke open tak van een semantisch tableau we een model kunnen aflezen dat een tegenvoorbeeld vormt voor de beschouwde gevolgtrekking. In ons geval krijgen we dus slechts één model waar $\forall x Ax$ en $\exists x \forall y Rxy$ waar zijn en $\forall x(Ax \wedge Rxx)$ niet waar is. Het model verkrijgen we door de tak (het pad) te beschouwen die in het open blad start en in de "wortel" sequent eindigt. We wandelen van het open blad naar de wortel en bezoeken elk van de sequenten op onze tak (ons pad). De *atomaire* formules die slechts constanten bevatten schrijven we op in twee aparte kolommen. De atomaire formules die rechts in een sequent voorkomen schrijven we in de rechter kolom op en de atomaire formules die links in een sequent voorkomen schrijven we in de linker kolom op.

Links in een sequent van de open tak.	Rechts in een sequent van de open tak.
**	Rd_1d_1
Ad_1, Ad_2	***
Rd_2d_2, Rd_2d_1	***

Het domein van het model bestaat uit alle constanten die in de rechter- of linkerkolom voorkomen: $D = \{d_1, d_2\}$. Alles wat in de linkerkolom voorkomt is een waar feit en alles wat in de rechterkolom staat is een onwaar feit. Dus krijgen we de volgende interpretaties: $I(A) = \{d_1, d_2\}$ (m.a.w. $I(A)$ is het hele domein); en $I(R) = \{(d_2, d_2), (d_2, d_1)\}$, het paar (d_1, d_1) mag *niet* voorkomen en onze houding ten opzichte van het paar (d_1, d_2) is neutraal: het mag wel of het mag niet voorkomen. Wij kiezen ervoor het paar (d_1, d_2) niet op te nemen om het model zo "klein" mogelijk te houden.
Het (minimale) model:
(Elk van de elementen van het domein d_2, d_1 heeft eigenschap A. Dit is niet aangegeven in het plaatje. De pijlen stellen de relatie $I(R)$ voor.)



Vraag 7 Bewijs met natuurlijke deductie: $\exists x Ax, \forall x \forall y(Ax \to By) \vdash \forall x Bx$.
Antwoord:
Merk op dat vanwege twee van de prenex wetten $\forall x \forall y(Ax \to By)$ equivalent is met $\exists x Ax \to \forall y By$. (Merk op dat het bereik van $\exists x$ slechts Ax is en het bereik van $\forall y$ de uitdrukking By is.) Uit de eerste opmerking is ook een strategie voor het bewijs af te lezen: bewijs eerst $\forall x \forall y(Ax \to By) \vdash \exists x Ax \to \forall y By$. Daarna is het bewijs van $\exists x Ax, \forall x \forall y(Ax \to By) \vdash \forall x Bx$ via $\to$E eenvoudig. We laten de uitvoering van deze strategie aan de lezer over. Wij zullen voor het bewijs van $\exists x Ax, \forall x \forall y(Ax \to By) \vdash \forall x Bx$ een andere strategie volgen: daar $\exists x Ax$ geldt zullen we aannemen dat er een object (noem het d) bestaat dat de eigenschap A heeft. Met dit gegeven en het gegeven $\forall x \forall y(Ax \to By)$ laten we zien dat een willekeurig object e de eigenschap B heeft.

1.	$\exists x Ax$	uit φ	aanname φ
2.	$\forall x \forall y(Ax \to By)$	uit ψ	aanname ψ
3.	Ad	uit Ad	aanname
4.	$\forall y(Ad \to By)$	uit ψ	$\forall$E(2)
5.	$Ad \to Be$	uit ψ	$\forall$E(4)
6.	Be	uit ψ, Ad	$\to$E(3,5)
7.	$\forall x Bx$	uit ψ, Ad	$\forall$I(6) e alleen in Be
8.	$\forall x Bx$	uit φ, ψ	$\exists$E(1,7) d alleen in Ad.

Een subbewijs wordt gevormd door regels 3. tot en met 7. (voor de toepassing van $\exists$E); dit is tevens het bereik van de constante d (in regel 3. wordt een object geintroduceerd met eigenschap A). Regels 5. tot en met 6. vormen ook een subbewijs(voor de toepassing van $\forall$I). In regel 5. wordt een willekeurig object e genomen waarvoor aangetoond wordt dat het eigenschap B heeft; het bereik van de constante e is regel 5. tot en met 6.

Vraag 8 a)
Geef voor de formule $p \vee q$ een logische equivalente formule die alleen de connectieven $\to$ en $\neg$ bevat.
Antwoord:
$(p \vee q) \equiv (\neg\neg p \vee q) \equiv (\neg p \to q)$.

b)
Beargumenteer dat $\{\to, \neg\}$ functioneel volledig is, dat wil zeggen dat er voor iedere formule φ van de propositielogica een logisch equivalente formule φ' bestaat die alleen de connectieven $\to$, $\neg$ bevat. Laat dit zien aan de formule $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$.
Antwoord:
Daar $\{\neg, \vee\}$ functioneel volledig is en $\vee$ uitgedrukt kan worden in termen van $\neg, \to$ (zie a)) weten we ook dat $\{\neg, \to\}$ functioneel volledig is.
Voor dat we laten zien hoe de formule $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$ omgezet kan worden in een equivalente formule die slechts $\neg, \to$ bevat, laten we eerst zien hoe je een formule van de vorm $\varphi \wedge \psi$ om kan zetten in een equivalente formule die slechts $\neg, \to$ bevat (op voorwaarde dat de formules φ en ψ uitsluitend de connectieven $\neg, \to$ bevatten):
$(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi)$.
We hebben achtereenvolgens dubbele negatie, de wet van de Morgan, a) en tot slot weer dubbele negatie gebruikt.
Nu laten we zien hoe $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$ omgezet kan worden in een formule die slechts $\neg, \to$ bevat:
$\neg p \vee (p \leftrightarrow q) \equiv$ gebruik a)
$\neg\neg p \to (p \leftrightarrow q) \equiv$
$\neg\neg p \to ((p \to q) \wedge (q \to p)) \equiv$
$\neg\neg p \to \neg((p \to q) \to \neg(q \to p)) \equiv$ (het laatste vanwege de vorige alinea)
$p \to \neg((p \to q) \to \neg(q \to p))$.

c)

Geef een precies bewijs met formule-inductie van de bewering in b). Dus: definieer de formule φ' voor $\varphi = p, \varphi = \neg\alpha, \varphi = \alpha \vee \beta, \varphi = \alpha \wedge \beta, \varphi = \alpha \to \beta$ en $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$.

Antwoord:

Basis

φ is een propositieletter p, dan klaar: $\varphi' = p$.

Inductiestap

Stel dat α en β formules in de propositielogica zijn waarvoor er formules α' en β' bestaan zódat

(1) $\alpha \equiv \alpha'$,

(2) $\beta \equiv \beta'$,

(3) α' bevat slechts de connectieven $\neg, \to$,

(4) β' bevat slechts de connectieven $\neg, \to$.

(M.a.w. de inductiehypothese geldt.) We laten nu zien dat als φ opgebouwd is uit formules α en β waarvoor de IH geldt en met behulp van de connectieven $\neg, \wedge, \vee, \to$ and $\leftrightarrow$, dan kunnen we een formule φ' vinden die logisch equivalent is met φ en die slechts de connectieven $\neg, \to$ bevat. We beschouwen daartoe de volgende 5 gevallen:

Geval $\varphi = \neg\alpha$: Laat $\varphi' = \neg\alpha'$.

Geval $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Laat $\varphi' = \neg(\alpha' \to \neg\beta')$. (Zie 8b.)

Geval $\varphi = \alpha \vee \beta$: Laat $\varphi' = \neg\alpha' \to \beta'$. (Zie 8a.)

Geval $\varphi = \alpha \to \beta$: Laat $\varphi' = \alpha' \to \beta'$.

Geval $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$: Laat $\varphi' = \neg((\alpha' \to \beta') \to \neg(\beta' \to \alpha'))$. (Zie 8b.)