Er zijn 8 opgaven. Iedere opgave is 10 punten waard, behalve opgaven 4 en 8 die 20 punten waard zijn. Opgaven 1-4 en 8 gaan over de propositielogica, opgaven 5-7 over de predikaatlogica.
De opgaven hoeven uiteraard niet in de gegeven volgorde gemaakt te worden.

Geef in semantische tableaus precies aan welke reductieregels je gebruikt.

1. Op de vraag "Wat is het geheim van uw lange leven?" antwoordde 100-jarige Jan:
"Bij iedere maaltijd houd ik me aan de volgende drie dieetregels:

i. Als ik geen bier drink, dan neem ik soep.

ii. Als ik soep eet en bier drink, dan neem ik ijs toe.

iii. Als ik ijs eet of geen bier drink, dan sla ik de soep over."

Drinkt Jan bij iedere maaltijd bier? Neemt Jan bij iedere maaltijd soep?
Bepaal het antwoord op deze vragen met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

2. Geef reductieregels voor het binaire connectief $\varphi \oplus \psi$ (dit is "exclusive or": óf φ óf ψ).

Laat dan met behulp van een semantisch tableau zien
dat de formule $(p \oplus q) \to (p \to \neg q)$ een tautologie is.

3. Uit $(p \to q) \wedge (p \to r)$ volgt $p \to (q \wedge r)$.
Toon dat aan door middel van een semantisch tableau.

4. Bewijs met natuurlijke deductie, zonder bekende wetten te gebruiken:

a) $(p \wedge q) \vee r \;\vdash\; (r \to p) \to p$

b) $\vdash\; (p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$

5. Beschouw het domein der mensen, met de volgende twee predikaten:
Oxy betekent dat x een ouder van y is, en Vx betekent dat x een vrouw is.
Verder zijn j, a en m constanten die staan voor Jan, Ans en Marie.
Schrijf nu ieder van de volgende zinnen als formule van de predikaatlogica:

a) Ans en Marie zijn vrouwen, maar Jan niet.

b) Jan en Marie hebben dezelfde moeder.

c) Jan en Ans hebben een dochter die een dochter heeft.

d) Iedere dochter van Jan en Ans heeft een zoon.

6. Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is: uit $\forall x Ax$ en $\exists x \forall y Rxy$ volgt dat $\forall x(Ax \wedge Rxx)$.

Construeer dan uit het semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor deze gevolgtrekking.

7. Bewijs met natuurlijke deductie: $\exists x Ax,\ \forall x \forall y(Ax \to By)\ \vdash\ \forall x Bx$.

8. **a)** Geef voor de formule $p \vee q$ een logisch equivalente formule die alleen de connectieven $\to$ en $\neg$ bevat.

b) Beargumenteer dat $\{\to, \neg\}$ functioneel volledig is, dat wil zeggen dat er voor iedere formule φ van de propositielogica een logisch equivalente formule φ' bestaat die alleen de connectieven $\to$ en $\neg$ bevat. Laat dit zien aan de formule $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$.

c) Geef een precies bewijs met formule-inductie van de bewering in **b**. Dus: definieer de formule φ' voor $\varphi = p$, $\varphi = \neg\alpha$, $\varphi = \alpha \vee \beta$, $\varphi = \alpha \wedge \beta$, $\varphi = \alpha \to \beta$ en $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$.