Uitwerking Opgave 7b
Logica, december 1999

Hierna volgt een mogelijke uitwerking van Opgave 7b van het tentamen Logica van december 1999. De uitwerking in de doc-file is verouderd.

We laten zien dat $\forall x \forall y\,(Kyx \to Bx) \vdash \forall x\,(\exists y\,Kyx \to Bx)$.

1.	$\forall x \forall y\,(Kyx \to Bx)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\exists y\,Kyd$	`uit` $\exists y\,Kyd$	aanname
3.	Ked	`uit` Ked	aanname
4.	$\forall y\,(Kyd \to Bd)$	`uit` φ	$\forall\,$E(1)
5.	$Ked \to Bd$	`uit` φ	$\forall\,$E(4)
6.	Bd	`uit` Ked, φ	$\to$ E(5, 3)
7.	Bd	`uit` $\exists y\,Kyd, \varphi$	$\exists$E(2, 6) e alleen in Ked
8.	$\exists y\,Kyd \to Bd$	`uit` φ	$\to$ I(7)
9.	$\forall x\,(\exists y\,Kyx \to Bx)$	`uit` φ	$\forall\,$I(8) d alleen in $\exists y\,Kyd \to Bd$

Toelichting. Aan het begin van de buitenste haak wordt een willekeurig element d genomen, waarvoor we willen gaan bewijzen dat $\exists y\,Kyd \to Bd$ (zie regel 8). Om dat te bewijzen nemen we op regel 2 aan dat $\exists y\,Kyd$ (begin van de middelste haak), en we gaan bewijzen dat Bd (regel 7). Aan het begin van de binnenste haak wordt op regel 3 een element e genomen waarvoor geldt dat Ked (op regel 2 staat dat zo'n e bestaat) en we gaan (nog steeds) bewijzen dat Bd (regel 6).

Opmerking. De scope van de kwantor $\exists y$ in $\forall x\,(\exists y\,Kyx \to Bx)$ is Kyx. Velen hebben deze scope ten onrechte als $Kyx \to Bx$ opgevat, m.a.w. ze hebben de formule $\forall x\,(\exists y\,Kyx \to Bx)$ gelezen als $\forall x \exists y\,(Kyx \to Bx)$.