Logica voor Informatici Tentamen 21 december 1999, 14.00 – 17.00 Oplossingen

1.
Over Erwin weten we het volgende:
a) Als het regent, dan neemt hij zijn paraplu of regenpak mee.
b) Als hij zijn regenpak meeneemt, dan laat hij zijn paraplu thuis.
c) Als hij zijn paraplu meeneemt, dan regent het niet.
d) Als hij zijn regenpak thuis laat, dan regent het.

Wat neemt Erwin mee en wat laat hij thuis?
Bepaal dit met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

Antwoord:
Introduceer de volgende propositieletters: r, p, k. We laten r staan voor "het regent", p voor "Erwin neemt paraplu mee", en k voor "Erwin neemt regenpak mee". Opmerking: de negatie van "Erwin neemt paraplu mee" is "Erwin laat paraplu thuis" en evenzo is "Erwin laat regenpak thuis" de negatie van "Erwin neemt regenpak mee".
Met behulp van deze afspraken kunnen we nu de zinnen a) tot en met d) als formules van de propositielogica voorstellen:

a) komt overeen met: $r \rightarrow (p \vee k)$
b) komt overeen met: $k \rightarrow \neg p$
c) komt overeen met: $p \rightarrow \neg r$
d) komt overeen met: $\neg k \rightarrow r$

r	**p**	**K**	$r \rightarrow (p \vee k)$	$k \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow \neg r$	$\neg k \rightarrow r$	
0	0	0	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	1	********
0	1	0	1	1	1	0	
0	1	1	1	0	(1)	(1)	
1	0	0	0	(1)	(1)	(1)	
1	0	1	1	1	1	1	********
1	1	0	1	1	0	(1)	
1	1	1	1	0	(0)	(1)	

We zoeken naar alle modellen (=waarderingen) waar elk van de formules a) - d) waar zijn. Er zijn twee modellen waarvoor dit geldt: 1) 001 en 2) 101. Dus Erwin neemt paraplu niet mee , regenpak wél.
(Het blijkt dat de regenconditie er niet toe doet.)

2.
Geef reductieregels voor het ternaire connectief if φ then ψ else χ
(dat logisch equivalent is met $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$).
Laat nu met behulp van een semantisch tableau zien dat de volgende formule een tautologie is:

(if p then q else r) $\rightarrow$ (if $\neg$p then r else q)

Antwoord:
Linkerkant:

We kijken wat het effect is in een semantisch tableau als we een formule $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$ in een sequent van het semantisch tableau aan de linkerkant tegenkomen:

$A, (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi) \circ \Gamma$

$\vee L$

$A, \varphi \wedge \psi \circ \Gamma$ $\qquad\qquad$ $A, \neg\varphi \wedge \chi \circ \Gamma$

$\wedge L$ $\qquad\qquad$ $\wedge L$

$A, \varphi, \psi \circ \Gamma$ $\qquad\qquad$ $A, \neg\varphi, \chi \circ \Gamma$

$\neg L$

$A, \chi \circ \varphi, \Gamma$

Daar if φ then ψ else χ log. eq. is met $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$ kunnen we uit het bovenstaande de linker reductieregel voor het if then else connectief aflezen (we noemen de reductieregel *iteL*):

iteL:

A, if φ then ψ else χ $\circ \Gamma$

$A, \varphi, \psi \circ \Gamma$ $\qquad\qquad$ $A, \chi \circ \varphi, \Gamma$

Rechterkant: Merk op dat if φ then ψ else χ ook logisch equivalent is met $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \chi)$. Het is nu handiger om $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \chi)$ in plaats van $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$ te gebruiken.
Uitwerking is nu analoog met uitwerking van linkerkant:

$A \circ (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \chi), \Gamma$

$\wedge R$

$A \circ \varphi \rightarrow \psi,$ $\qquad\qquad$ $A \circ \neg\varphi \rightarrow \chi, \Gamma$

$\rightarrow R$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow R$

$A, \varphi \circ \psi, \Gamma$ $\qquad\qquad$ $A, \neg\varphi \circ \chi, \Gamma$

$\neg L$

$A \circ \varphi, \chi, \Gamma$

Dus de rechter reductieregel voor het if then else connectief is als volgt (we noemen de regel *iteR*):

iteR:

A o if φ then ψ else χ, Γ

A, φ o ψ, Γ A o φ, χ, Γ

Antwoord op het tweede gedeelte:

Nu gaan we het tweede gedeelte van de opgave doen. We willen aantonen dat (if p then q else r) → (if ¬p then r else q) een tautologie is. (Merk op dat een formule φ een tautologie is ⇔ het(een) semantisch tableau van de sequent o φ sluit.)

o (if p then q else r) → (if ¬p then r else q)

→R

if p then q else r o if ¬p then r else q

iteL

p, q o   r o p

iteR   iteR

¬p o r   o ¬p,q   ¬por   o ¬p,q

=   =

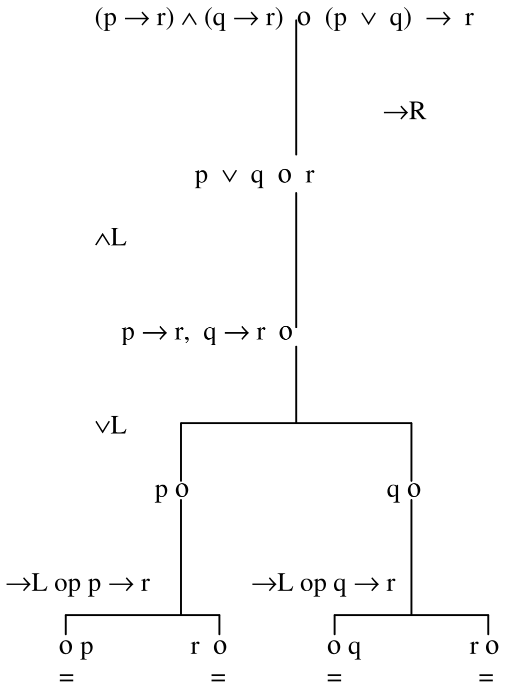
¬L   ¬R

o p   p o

=   =

3.
Uit $(p \to r) \wedge (q \to r)$ volgt $(p \vee q) \to r$.
Toon dit aan door middel van een semantisch tableau.

Antwoord:



4.
Bewijs met natuurlijke deductie:

a) $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$
Antwoord: (voorbeeld 4.5 van het boek; zie uitwerking Extra Logica)

1.	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	uit φ	aanname φ
2.	$p \vee q$	uit $p \vee q$	aanname; te bew.: r
3.	p	uit p	aanname; te bew.: r
4.	$p \to r$	uit φ	$\wedge E(1)$
5.	r	uit φ, p	$\to E(3,4)$
6.	q	uit q	aanname; te bew.: r
7.	$q \to r$	uit φ	$\wedge E(1)$
8.	r	uit φ, q	$\to E(6,7)$
9.	r	uit φ, $p \vee q$	$\vee E(2,5,6)$
10.	$(p \vee q) \to r$	uit φ	$\to I(9)$

Bewijs met natuurlijke deductie:

b) $p \to \neg q \vdash q \to \neg p$
Antwoord:

1.	$p \to \neg q$	uit φ	aanname φ
2.	q	uit q	aanname; te bew: $\neg p$ // we gaan p weerleggen

3.	p	uit p	aanname;
			// p geeft aanleiding
			// tot tegenspraak:
			// q en $\neg q$

4.	$\neg q$	uit φ, p	$\to E(1,3)$
			// we hebben p weerlegd
			// we gaan p intrekken

5.	$\neg p$	uit φ, q	$\neg I(2,4)$
6.	$q \to \neg p$	uit φ,	$\to I(5)$

5.
Beschouw het domein der mensen, met de volgende twee predikaten:
Oxy betekent dat x een ouder is van y is, en Vx betekent dat x een vrouw is.
Schrijf nu ieder van de volgende zinnen als formule van de predikaatlogica:
a)
Er zijn mensen die geen dochter hebben.
Antwoord:
x heeft een dochter: $\exists y(Oxy \wedge Vy)$
x heeft *geen* dochter: $\neg\exists y(Oxy \wedge Vy)$
Er zijn mensen die geen dochter hebben: $\exists x \neg\exists y(Oxy \wedge Vy)$
b)
Niemand is grootvader
Antwoord:
x is grootvader: $\exists y \exists z(Oxy \wedge Oyz) \wedge \neg Vx$
Iemand is grootvader: $\exists x \exists y \exists z(Oxy \wedge Oyz \wedge \neg Vx)$
Niemand is grootvader: $\neg\exists x \exists y \exists z(Oxy \wedge Oyz \wedge \neg Vx)$
c)

Iedere moeder heeft minstens twee kinderen

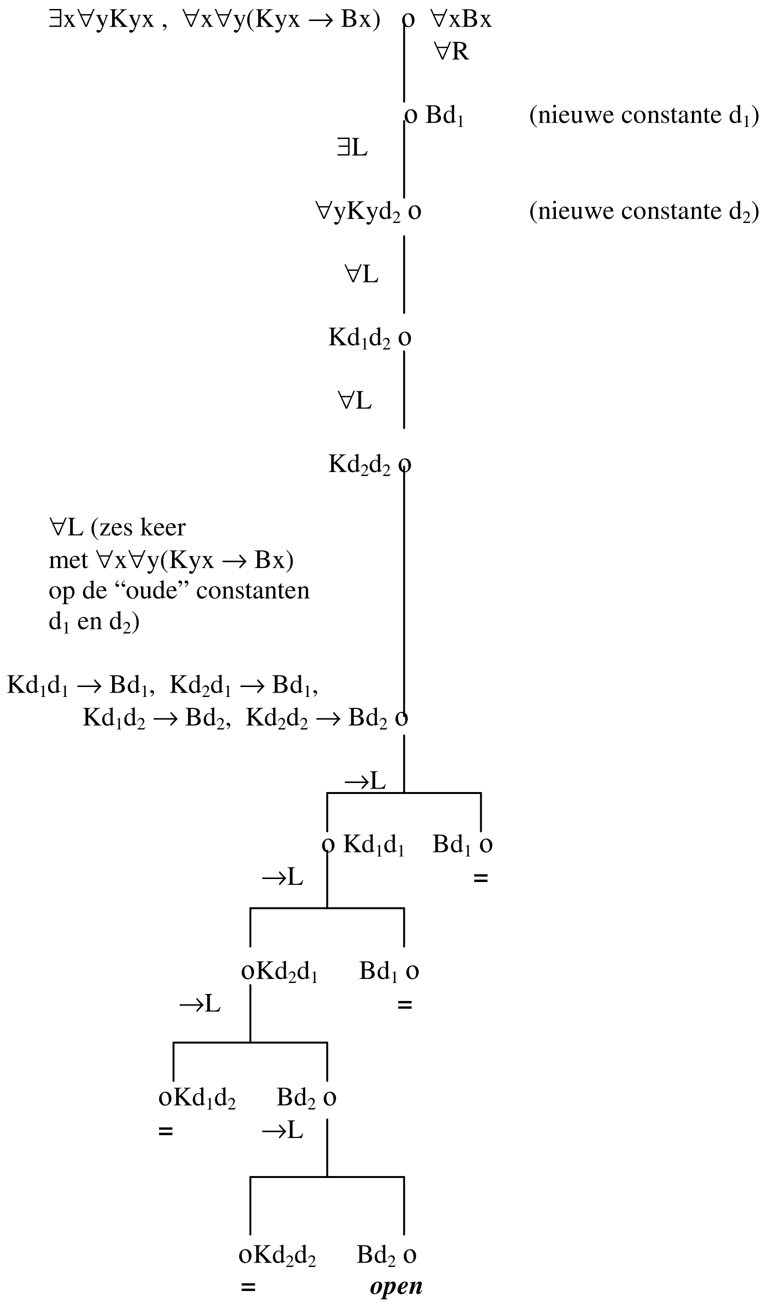
Antwoord:

$\forall x \forall y\ ((Oxy \wedge Vx) \ \rightarrow \exists z(\neg{=}zy \wedge Oxz))$ of
$\forall x \forall y\ ((Oxy \wedge Vx) \ \rightarrow \exists z(\neg z{=}y \wedge Oxz))$

6.

Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is: uit $\exists x \forall y Kyx$ en $\forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx)$ volgt dat $\forall x Bx$.
Construeer uit het semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor deze gevolgtrekking.
Opmerking: lees eventueel Kyx als "y kent x" en Bx als "x is bekend".

Antwoord op opgave 6 mbv een semantisch tableau:



Uit bovenstaande tableau kunnen we een model construeren dat laat zien dat de gevolgtrekking

$\exists x \forall y Kyx\ ,\ \forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx) \ \ / \ \forall x Bx$

niet geldig is. Dwz voor dit model geldt dat $\exists x \forall y Kyx$ en $\forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx)$ waar zijn en $\forall x Bx$ niet waar is.

Constructie van het tegenvoorbeeld model:

Beschouw het unieke pad van de knoop waar ***open*** bij staat tot de "wortel" $\exists x \forall y Kyx$, $\forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx)$ o $\forall x Bx$. Elke sequent op deze tak gaan we bezoeken en de atomaire formules waar uitsluitend constanten in voorkomen gaan we opschrijven. Als ze links voorkomen gebruiken we de prefix T en als ze rechts voorkomen gebruiken we de prefix F. Als we van het open blad naar de wortel wandelen krijgen we achtereenvolgens:

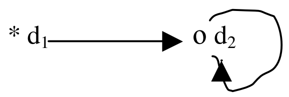
TBd_2, (weer TBd_2), FKd_2d_1, FKd_1d_1, TKd_2d_2, TKd_1d_2, en tot slotte: FBd_1

Domein: $\{d_1, d_2\}$ alle constanten die voorkomen.

De eenplaatsige relatieletter B wordt als volgt geinterpreteerd: $I(B) = \{d_2\}$ (waar een F bijstaat –of te wel rechts in het tableau - wordt niet opgenomen, waar een T bijstaat –of te wel links in het tableau -- wordt wel opgenomen).

De tweeplaatsige relatieletter K wordt als volgt geinterpreteerd: $I(K) = \{ (d_2, d_2), (d_1, d_2) \}$ (precies de paren waar een T bijstaat – of te wel links in het tableau: TKd_2d_2, TKd_1d_2 ; de andere twee paren worden niet opgenomen want daar staat een F bij of te wel staan links in het tableau).

Plaatje:



Uitleg: punten met * zijn $\neg B$ en punten met een o zijn B; een pijl die van punt a vertekt en in punt b aankomt zegt: Kab dwz a kent b; dus ons geval: $d_1$is niet bekend, $\neg B$; d_2 is wel bekend, B; d_1 kent d_2, en d_2 kent d_2.

7.
Laat zien dat uit $\forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx)$ volgt dat $\forall x(\exists yKyx \rightarrow Bx)$. Doe dat met
a) een semantische tableau, en
b) met natuurlijke deductie.
Opmerking: dit is één van de prenex-equivalenties.

Antwoord op 7a:

$\forall x \forall y(Kyx \rightarrow Bx)$ o $\forall x(\exists yKyx \rightarrow Bx)$

$\forall R$

o $\exists yKyd_1 \rightarrow Bd_1$ (nieuwe d_1)

$\rightarrow R$

$\exists yKyd_1$ o Bd_1

$\exists L$

Kd_2d_1 o (nieuwe d_2)

$\forall L$

$\forall yKyd_1 \rightarrow Bd_1$ o (oude d_1)

$\forall L$

$Kd_2d_1 \rightarrow Bd_1$ o (oude d_2)

$\rightarrow L$

o Kd_2d_1 | Bd_1 o

= | =

Antwoord 7b:

Toon aan: $\forall x \forall y(Kyx \to Bx) \vdash \forall x(\exists y Kyx \to Bx)$

1.	$\forall x \forall y(Kyx \to Bx)$	uit φ	aanname φ
	// neem een willekeurige x; te bew.: $\exists y Kyx \to Bx$		
2.	$\exists y Kyx$	uit $\exists y Kyx$	aanname; te bew: Bx
	// neem zo'n y;		
3.	Kyx	uit Kyx	aanname ; te bew: Bx
4.	$\forall y(Kyx \to Bx)$	uit φ	$\forall E(1)$ x is vrij voor x in $\forall y(Kyx \to Bx)$
5.	$Kyx \to Bx$	uit φ	$\forall E(4)$ y is vrij voor y in $Kyx \to Bx$
6.	Bx	uit Kyx, φ	$\to E(5,3)$
7.	Bx	uit $\exists y Kyx$, φ	$\exists E(2,6)$ y is niet vrij in Bx, φ
8.	$\exists y Kyx \to Bx$	uit φ	$\to I(7)$
9.	$\forall x(\exists y Kyx \to Bx)$	uit φ	$\forall I(8)$ x is niet vrij in φ

Nabespreking:

De scope van $\exists y$ in $\forall x(\exists y Kyx \to Bx)$ is Kyx. Velen hebben de scope van $\exists y$ in $\forall x(\exists y Kyx \to Bx)$ ten onrechte $Kyx \to Bx$ laten zijn m.a.w. de formule $\forall x(\exists y Kyx \to Bx)$ werd gelezen als $\forall x \exists y(Kyx \to Bx)$.

8 a
Wat zijn de wetten van de Morgan?
Geef ook de wetten voor negatie in combinatie met kwantoren.
Wat is het principe van dubbele negatie?
Antwoord:
Laat ϕ en ψ formules van de predikaatlogica zijn, dan kunnen de wetten van de Morgan (en de wetten voor negatie in combinatie met kwantoren [deze laatste worden ook als wetten van de Morgan betiteld]) als volgt uitgedrukt worden:

i) $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$

ii) $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$

iii) $\neg\forall x\phi \equiv \exists x\neg\phi$

iv) $\neg\exists x\phi \equiv \forall x\neg\phi$

Het principe van dubbele negatie:

v) $\neg\neg\phi \equiv \phi$

($\equiv$ staat voor: is logisch equivalent met)

8 b
We noemen in deze opgave een predikaatlogische formule ϕ "genormaliseerd" als negaties toegepast zijn op *atomaire* subformules van ϕ.
Bijv. $\forall x\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is genormaliseerd, maar $\neg\forall x\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is niet genormaliseerd, en $\forall x\exists y\,\neg(Rxy \wedge \neg Ryx)$ ook niet.
Leg uit hoe je voor iedere formule ϕ van de predikaatlogica een genormaliseerde formule ϕ' kunt maken die logisch equivalent is met ϕ. Laat dit zien aan de formule $\neg\forall x\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$.

Antwoord:
Het is duidelijk dat je met equivalenties 8a (i) -- v)) negaties "naar binnen kunt werken en/of wegwerken". We passen dit toe op $\neg\forall x\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$:

$\neg\forall x\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$	pas nu iii) toe
$\equiv \exists x\neg\exists y\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$	pas nu iv) toe
$\equiv \exists x\forall y\neg\,(Rxy \wedge \neg Ryx)$	pas nu ii) toe
$\equiv \exists x\forall y\,(\neg Rxy \vee \neg\neg Ryx)$	pas nu v) toe
$\equiv \exists x\forall y\,(\neg Rxy \vee Ryx)$	

8 c
Bewijs de bewering in **b** door de volgende bewering te bewijzen met formule-inductie:
Voor iedere formule ϕ van de predikaatlogica zijn er genormaliseerde formules ϕ' en ϕ'' zodat ϕ' logisch equivalent is met ϕ, en ϕ'' logisch equivalent is met $\neg\phi$.
Opmerking: het is voldoende dit te bewijzen voor formules waar $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ niet in voorkomen.
Antwoord:

N.B.: Daar iedere formule die $\exists$, $\forall$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ bevat, logisch equivalent is met een formule die slechts $\exists$, $\forall$, $\neg$, $\vee$ en $\wedge$ bevat, is het voldoende om bovenstaande bewering te bewijzen voor formules die slechts $\exists$, $\forall$, $\neg$, $\vee$ en $\wedge$ bevatten. N.B.: met minder kun je niet toe.

We bewijzen de gestelde bewering met formule-inductie naar ϕ.
Basis:
ϕ is een *atomaire* formule dus van de vorm $R^k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. In dit geval kun je voor ϕ' de formule ϕ nemen en voor de formule ϕ'' de formule $\neg\phi$.
Inductiestap:
Stel dat de bewering geldt voor de formules α en β (de inductiehypothese, IH). Dan geldt de bewering ook voor $\phi = \neg\alpha$, $\phi = \alpha \wedge \beta$, $\phi = \alpha \vee \beta$, $\phi = \exists x\alpha$ en $\phi = \forall x\alpha$.

<u>Geval $\phi = \neg\alpha$</u>: neem voor ϕ' de formule α'' (want $\phi = \neg\alpha \equiv$ (IH) α'') en voor ϕ'' de formule α' (want $\neg\phi = \neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (dubbele negatie) $\equiv \alpha'$ (IH) $= \phi''$).

<u>Geval $\phi = \alpha \vee \beta$:</u> neem voor ϕ' de formule $\alpha' \vee \beta'$ (want $\alpha \equiv \alpha'$ (IH) en $\beta \equiv \beta'$ (IH), dus $\phi = \alpha \vee \beta \equiv \alpha' \vee \beta'$) en voor ϕ'' de formule $\alpha'' \wedge \beta''$ (want
$\neg\phi = \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (8a, i) $\equiv \alpha'' \wedge \beta''$ (IH)).

<u>Geval $\phi = \alpha \wedge \beta$:</u> neem voor ϕ' de formule $\alpha' \wedge \beta'$ en voor ϕ'' de formule $\alpha'' \vee \beta''$.

<u>Geval $\phi = \exists x\alpha$:</u> Neem voor ϕ' de formule $\exists x\alpha'$ en voor $\phi'' = \forall x\alpha''$ ($\neg\phi = \neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$ (8a, iv) $\equiv \forall x\alpha''$(IH)).

<u>Geval $\phi = \forall x\alpha$:</u> Neem $\phi' = \forall x\alpha'$ en voor $\phi'' = \exists x\alpha''$.

Merk op dat we in alle gevallen behalve <u>$\phi = \neg\alpha$</u> voor het construeren van ϕ' met α' en β' werken en voor ϕ'' met α'' en β''. In geval van <u>$\phi = \neg\alpha$</u> gebruiken we voor ϕ' formule α'' en voor ϕ'' formule α'. Zie in dit verband ook de nabespreking:

Nabespreking:
Na **8 b** gedaan te hebben ben je geneigd de volgende bewering met formule-inductie te bewijzen: Voor iedere formule ϕ van de predikaatlogica is er een genormaliseerde formule ϕ' zodat ϕ' logisch equivalent is met ϕ. Voor deze bewering lukt formule-inductie niet in het geval $\phi = \neg\alpha$, en het inductiebewijs lukt wel voor de sterkere bewering: Voor iedere formule ϕ van de predikaatlogica zijn er genormaliseerde formules ϕ' en ϕ'' zodat ϕ' logisch equivalent is met ϕ, en ϕ'' logisch equivalent is met $\neg\phi$. (Een bekend fenomeen: inductiebewijs lukt niet voor de uitspraak die je wilt bewijzen, maar lukt wel voor een sterkere uitspraak. Zie ook Extra Logica, pagina 18).