

Tussentoets Analyse 1NA

donderdag 26 oktober 2017, 11.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering en vermeld de stellingen die je gebruikt!

Een grafische rekenmachine is niet toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

Voor dit tentamen kunnen 55 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 31 pt.

1. Los op voor $z \in \mathbb{C}$: $z^4 = -64$. Geef het antwoord in rechthoekige coördinaten ($z = a + bi$).
2. Het polynoom $P(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 18x + 9$ heeft een nulpunt $x = -3$.
Bepaal alle complexe nulpunten van $P(x)$.
3. Bereken de volgende limieten zonder de stelling van de l'Hôpital te gebruiken:
 - a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sin(2x)}{x + \cos(x)}$.
 - b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{3x - 2} - x}$.
4. Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{\ln \left(\frac{2 + \cos^2(x)}{2 - \cos^2(x)} \right)}$.
Bepaal $f'(x)$.

***** Op de achterzijde staan nog meer opgaven! *****

5. Bewijs m.b.v. de middelwaardestelling dat

$$\ln(1+x) < x$$

voor $-1 < x < 0$ en voor $x > 0$.

6. Beschouw de functie $g(x) = x^7 + x^4 + x + 2$.

a. Toon aan dat g injectief is op $\mathbb{R}$.

b. Bereken $(g^{-1})'(1)$.

7. De ellips $E \subset \mathbb{R}^2$ heeft vergelijking

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 = 6.$$

Er zijn twee punten op E waar de raaklijn aan de ellips horizontaal is.
Bepaal de coördinaten van deze punten.

Puntenverdeling:

1	2	3	4	5	6	7	Totaal
7	8	9	6	8	9	8	55

1. a. Geef de (tijdsafhankelijke) Schrödinger-vergelijking.
- b. Leid voor het geval dat de potentiële energie geen functie is van de tijd, door scheiding van variabelen, de vorm af van het tijdsafhankelijk deel van de golffunctie.
- c. Het plaatsafhankelijk deel van de golffunctie voor het geval onder (b) voldoet aan de vergelijking $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$. Bepaal de spreiding in de energie voor een deeltje in de toestand beschreven met $\psi(x)$.

2. Beschouw een harmonische oscillator met hoekfrequentie ω .

In termen van de ladderoperatoren

$$\hat{a}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (-i\hat{p}_x + m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (i\hat{p}_x + m\omega\hat{x})$$

kan de Hamilton-operator geschreven worden als

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right)$$

en als
$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_- \hat{a}_+ - \frac{1}{2} \right)$$

- a. Stel dat de functie $\psi_i(x)$ een oplossing is van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking bij energie E .

Laat zien dat $\{\hat{a}_- \psi_i(x)\}$ ook een oplossing is van deze vergelijking. Bij welke energie?

De grondtoestand van deze harmonische oscillator wordt beschreven met

$$\psi_0(x) \sim \exp \left\{ -\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right\}$$

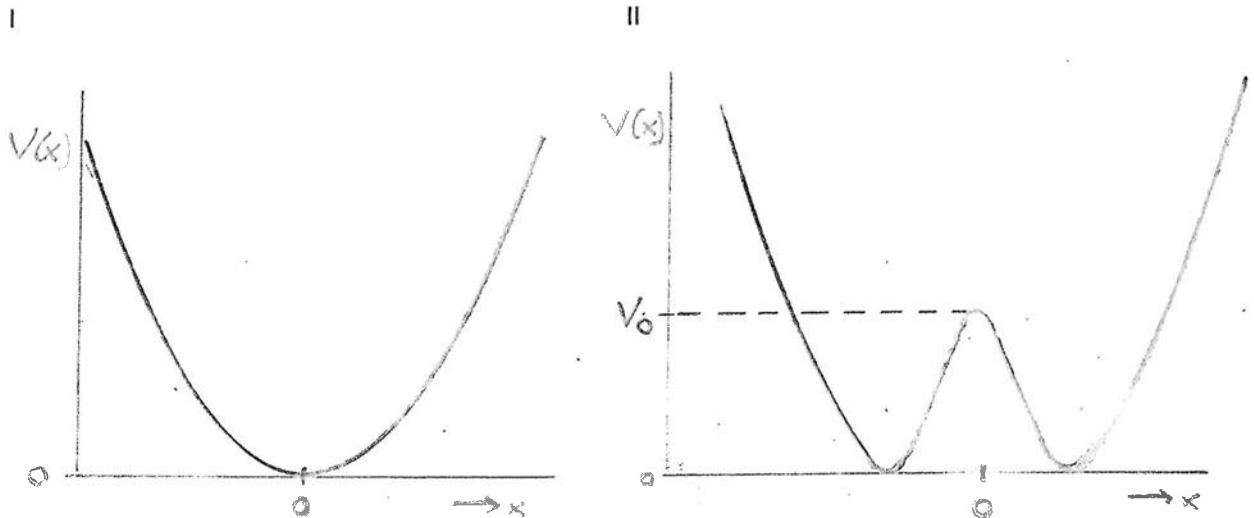
- b. Bepaal uitgaande van $\psi_0(x)$ de vorm van de golffunctie $\psi_1(x)$ voor de eerste aangeslagen toestand (dus exclusief normering).

De ladder-operatoren verbinden de genormeerde stationaire toestanden door de relaties

$$\hat{a}_+ \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x)$$

$$\hat{a}_- \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x)$$

- c. Bereken de commutator van de operatoren $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$.
 - d. Bereken de verwachtingswaarde van de kinetische energie T als de oscillator zich bevindt in een van de stationaire toestanden $\psi_n(x)$.
3. In onderstaande tekeningen is de potentiële energie als functie van x weergegeven voor (I) een harmonische oscillator en (II) dezelfde oscillator met een barrière rond $x = 0$. In beide gevallen is $V(x)$ een even functie van x .



- a. Schets voor geval I de golffunctie $\psi_0(x)$ voor de grondtoestand en $\psi_1(x)$ voor de eerste aangeslagen toestand als functie van x .
- b. Doe hetzelfde voor geval II onder de aanname dat de energie van beide toestanden kleiner is dan V_0 .
- c. Wat wordt in relatie tot potentiaal II verstaan onder "tunneling"?
- d. Noem drie factoren die de waarschijnlijkheid van "tunneling" bepalen. Geef aan hoe die afhankelijkheid er uit ziet.

Wiskundige Structuren 2017-2018, Quiz 2

Dinsdag 28 november 2017, 10u00–10u45

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen en andere resultaten die je gebruikt.

Vraag 1

Laat $A, B \subseteq \mathbb{R}$ twee niet-lege verzamelingen zijn. Definieer de verzameling $A - B$ door

$$A - B := \{a - b : a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

(Dit is dus wat anders dan de verzameling $A \setminus B$!)

- (a) Bewijs dat als A niet naar boven begrensd is, dat dan $\sup(A - B)$ niet bestaat.
- (b) Bewijs dat als A en B begrensde verzamelingen zijn, dat dan $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Vraag 2

- (a) Geef de definitie van Cauchy-rij.
- (b) Zij $(a_n)_{n \geq 0}$ een reële rij en $b, c \in \mathbb{R}$ met $b < c$. Stel dat $(b_k)_{k \geq 0}$ en $(c_k)_{k \geq 0}$ twee convergente deelrijen van $(a_n)_{n \geq 0}$ zijn, waarvoor geldt dat $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$. Bewijs dat $(a_n)_{n \geq 0}$ niet convergent is.

Ter herinnering: Een rij $(b_k)_{k \geq 0}$ is een deelrij van de rij $(a_n)_{n \geq 0}$ als er een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k \geq 0}$ bestaat zodat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_{n_k} = b_k$.

Succes!

Exam in the course "Astrobiology" on December 1, 2017

Please write your name and student number on each sheet of paper that you hand in.

-- GOOD LUCK --

1. The fundamental question is: "Are we alone?" Or more specifically, "are we alone as lifeforms in the Universe".
 - a) How do we define Astrobiology?
 - b) How can astrobiology be addressed today?
 - c) Why is astrobiology important today.?
 - d) How does it establish it self as a 'real' science?
 - e) What kind of questions can be answered by astrobiology?
2. Discuss (briefly) the physics of life (on Earth). Specifically:
 - a) What is life?
 - b) When do we think life arose on the Earth?
 - c) What do we know about how life arose on Earth?
 - d) What is Schrödingers paradox?
3. Describe what we know or think we know about the origin and evolution of life on the Earth. Give a simple timeline for the events.
4. What is a "biomarker" or a "biosignature"?
5. The cell is considered the smallest living entity. Describe the general structure of a cell, its building blocks and material, as well as the general aspects of it. What is the relation of the cell's in todays living organisms to the original living cells?
6. What is an "extremophile"? Give a few examples of "extremophile"? Discuss briefly if "extremophile" give us any information about the original life on the Earth.
7. What is the "peptide world"?
8. There must have been a border to pass between a sterile Earth and one with the first (simple) organisms on it. List three steps considered to be necessary to go from the sterile world to the living Earth, and valid for life on the Earth or elsewhere. Discuss the processes and requirements.
9. Generally, we assume that life only forms on a planetary surface or near it. A star is required to provide energy. Describe the steps in the formation of stars and accompanying planets. Where are planets and stars formed? And how?
10. What is the current baseline theory for the formation of Earth's Moon?
11. Is there evidence for organic matter being present when the Solar system formed? In that case where?
12. Describe the formation and evolution of the young Earth and its original structure.
13. It has been stated during the course that in order to begin to search for signs of life outside the Solar system we need to find and study other planetary systems - exoplanetary systems.
 - a) How do we find and study such systems today?
 - b) What can we currently learn about them?
14. Life elsewhere in the Solar System.
 - a) Discuss possible sites in the Solar system where we could find life or

traces of life(fossils).

- b) Searches for such life that have already been carried out?
- c) What are the necessary prerequisites?

15. The uniqueness of Water. Describe the water molecule. What are the characteristics that make it so special? What make it a necessary pre-requisite for the existence of life (as we know it)?