toets Analyse 1 NA, 24-10-2016

1. We gebruiken poolcoördinaten $z = |z|e^{i\varphi}$ $(\varphi = \arg z)$
$z^3 = |z|^3 e^{3i\varphi}$ $\quad |z|^3 = |-64i| = 64 \rightarrow |z| = 4.$
$e^{3i\varphi} = -i = e^{\frac{3\pi i}{2}}$ $\quad 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
dus $\varphi = \frac{\pi}{2} + k.\frac{2\pi}{3}$. Er zijn 3 verschillende oplossingen:

$$z_1 = 4e^{i\pi/2} = 4i$$
$$z_2 = 4e^{-i\pi/6} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = +2\sqrt{3} - 2i$$
$$z_3 = 4e^{-5i\pi/6} = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

2. Een geheel nulpunt is een deler van 14 dus $1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14$. Proberen toont aan dat $x = -2$ een nulpunt is. We kunnen een factor $x+2$ uitdelen: $P(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 7)$. De andere nulpunten van P zijn nulp. van $x^2 - 4x + 7$
$x^2 - 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -3 \Leftrightarrow x = 2 \pm i\sqrt{3}$.
De nulpunten zijn dus $x = -2$, $x = 2 + i\sqrt{3}$, $x = 2 - i\sqrt{3}$.

3a. Invullen geeft $\infty - \infty$, dit is een onbepaalde uitdrukking. We passen de worteltruc toe

$$\lim_{x\to-\infty} \ldots = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} \underset{\text{delen door } -x = \sqrt{x^2}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -1.$$

3b. Invullen geeft $\frac{0}{0}$. De stelling van de l'Hôpital toepassen mocht niet maar we kunnen wel factoren die gemeenschappelijk zijn uitdelen. Met de substitutie $y = x^3$ (niet per se nodig): $\lim_{x\to-1} \ldots = \lim_{y\to-1} \frac{y^3+1}{y^2-1}$

$$= \lim_{y\to-1} \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{(y+1)(y-1)} = \lim_{y\to-1} \frac{y^2-y+1}{y-1} = -3/2.$$

4. Als we $u(x) = \sqrt{2x+\sqrt{3x}}$ noteren, dan is $f(x) = \sqrt{x+u(x)}$ en $f'(x) = \dfrac{1+u'(x)}{2f(x)}$. Verder is $u'(x) = \dfrac{2+\sqrt{3}/(2\sqrt{x})}{2\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}$. Nu is $f(3) = \sqrt{3+u(3)}$ $= \sqrt{6}$, $u(3) = 3$, $f'(3) = \dfrac{1+u'(3)}{2f(3)}$, $u'(3) = \dfrac{2\frac{1}{2}}{6} = \dfrac{5}{12}$

dus $f'(3) = \dfrac{17/12}{2\sqrt{6}} = \dfrac{17}{24\sqrt{6}}$.

5. $\tan(x)$ is continu op $[0, \pi/4]$ en diffb. op $\langle 0, \pi/4\rangle$ (ook op $[0, \pi/4]$, trouwens). De MWS impliceert dan dat $\dfrac{\tan(x)-\tan(\pi/4)}{x-\pi/4} = \dfrac{1}{\cos^2(c)}$ met $0 < x < c < \frac{\pi}{4}$

Omdat $0 < \cos^2(c) < 1$, is $\dfrac{\tan(x)-\tan(\pi/4)}{x-\pi/4} > 1$ dus

$\tan(x) - \tan(\pi/4) < x - \pi/4$ en dus $\tan(x) < x - \frac{\pi}{4} + \tan(\frac{\pi}{4})$ $= x + 1 - \pi/4$.

6. (i) g continu in $x=0$. Dan moet

$\lim_{x\downarrow 0} g(x) = g(0) = \lim_{x\uparrow 0} g(x)$. Dit is het geval al

$\lim_{x\downarrow 0} \sin\frac{\pi}{x+1} = 0 = \lim_{x\uparrow 0} \cos(ax+b)$ dus $\cos b = 0$
dus $b = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(ii). g diff.baar in $x=0$ als

$\lim_{x\downarrow 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\uparrow 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$. Dit is het geval d.e.s.d. als $\lim_{x\downarrow 0} g'(x) = \lim_{x\uparrow 0} g'(x)$ (eigenlijk gebruik je hier de regel van de l'Hôpital; merk op dat beide limieten bestaan: $\lim_{x\downarrow 0} -\frac{\pi}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{x+1}\right) = \lim_{x\uparrow 0} -a\sin(ax+b)$

geeft $\pi = -a\sin b$. Conclusie: $\begin{cases} a=\pi, \; b = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \\ a = -\pi, \; b = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \end{cases}$

zijn de mogelijke oplossingen.

7. We noemen $f(x)$ hier $y(x)$ en differentiëren naar x:
$y'\sin(xy) + y(xy'+y)\cos(xy) = 0$. $x = \pi/2$, $y = 1$ invullen geeft dat $y' = 0$ dus $f'(\pi/2) = 0$. Nogmaals differentiëren: $y''\sin(xy) + 2y'(xy'+y)\cos(xy) +$ $y(xy''+2y')\cos(xy) - y(xy'+y)^2\sin(xy) = 0$. $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$ invullen geeft $y'' - y(xy'+y)^2 = 0$. Omdat $y' = 0$ is $y'' = f''(\frac{\pi}{2}) = 1$.