1a. $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = f(0)$ en $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0)$:

$\lim_{x\downarrow 0} x\ln^2 x = 0$ volgens standaardlimiet.

$\lim_{x\uparrow 0} \dfrac{2x^2+15x}{4x-2} = 0$

1b. $\lim_{x\downarrow 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \ln^2 x = \infty$, f dus niet diff.baar in $x=0$

1c. staartdelen levert

$f(x) = \frac{1}{2}x+4+\dfrac{8}{4x-2}$. Omdat $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{8}{4x-2} = 0$

heeft f een scheve asymptoot $y=\frac{1}{2}x+4$ voor $x\to-\infty$.

Omdat $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln^2 x = \infty$ heeft f geen

(horizontale/scheve) asymptoot voor $x\to\infty$. f heeft ook geen ~~scheve~~ verticale asymptoot (de noemer $4x-2$ is nergens nul als $x \leq 0$).

1d. $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \dfrac{32}{(4x-2)^2} & (x<0) \\ \ln^2 x + 2\ln x & (x>0) \end{cases}$ ofwel $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{8x^2-8x-30}{(4x-2)^2} \\ \ln^2 x + 2\ln x \end{cases}$

$f'(x) = 0$ als $(4x-2)^2 = 64$ en $x<0$ dus $x = -1\frac{1}{2}$

en als $\ln x(2+\ln x) = 0$ dus $x = 1$ of $x = \frac{1}{e^2}$

Tekenschema f'

$$\begin{array}{ccccccccc} + & & - & & + & & - & & + \\ & -1\tfrac{1}{2} & & 0 & & 1/e^2 & & 1 & \end{array}$$

extreme waarden (locaal)

max $f(-1\frac{1}{2}) = -15/4$

min $f(0) = 0$

max $f(1/e^2) = 4/e^2$

min $f(1) = 0$

Er zijn geen globale max./minima omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2a. Breuksplitsen: $\frac{x^2-4x}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x+2}$

met $(ax+b)(x+2) + c(x^2+4) = x^2-4x$

$(a+c)x^2 + (2a+b)x + (2b+4c) = x^2-4x$

$a+c=1,\ 2a+b=-4,\ 2b+4c=0$

$\rightarrow b=-3,\ a=-1/2,\ c=3/2.$ Dus is

$$\int \frac{x^2-4x}{(x^2+4)(x+2)}dx = \int \frac{-1/2\,x-3}{x^2+4}dx + \int \frac{3/2}{x+2}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2+4) - \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln|x+2| + c.$$

2c. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}dx = \arcsin(2x+1)+c.$

2b. $\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2\ln x}{x}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2\ (+c)$

$\int_0^1 x\ln^2 x\,dx = \lim_{a\downarrow 0}\left[\frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2\right]_a^1$

$= \frac{1}{4} - \lim_{a\downarrow 0}\frac{1}{2}a^2\ln^2 a + \lim_{a\downarrow 0}\frac{1}{2}a^2\ln a = 1/4$ (standaard-limieten).

3. Als $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ dan is $a=\sqrt{2a+15}$ dus $a^2-2a-15$ $=0$ dus $a=5$. Als de rij convergeert dan is de limiet 5. We tonen aan:

1. De rij stijgt: $a_{n+1} \geq a_n$
2. De rij is begrensd: $a_n \leq 5$ voor alle n

(1). als $0 \leq a < 5$ dan is $-(2a+15)+a^2 = (a-5)(a+3) < 0$ dus $a^2 < 2a+15$ dus $a < \sqrt{2a+15}$

(2). Als $0 \leq a < 5$ dan is $\sqrt{2a+15} < \sqrt{2\cdot 5+15} = 5$

Een stijgende begrensde rij convergeert dus $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$

4a. De reeks convergeert niet absoluut want $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert dus $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ ook (limit comparison test). Maar omdat $\{\sin\frac{1}{n}\}$ naar nul daalt (immers is $\sin x$ stijgend op $[0, \pi/2)$) convergeert de reeks voorwaardelijk volgens Leibnitz' test voor alternerende reeksen.

4b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{4n+3}}$ convergeert omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ convergeert en $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n\sqrt{4n+3}} = \frac{1}{2}$ (limit comparison test).

Omdat $\left|\frac{\cos n}{n\sqrt{4n+3}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{4n+3}}$ convergeert de reeks absoluut. Je kunt ook in 1 stap: $\left|\frac{\cos n}{n\sqrt{4n+3}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

5. met de l'Hôpital $\arctan(2\cdot 0) - 2\cdot 0 = 0$, $0^3 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - 2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^2}{3x^2(1+4x^2)}$$

$= -8/3$. Of met de Taylorreeks:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{1}{3}(2x)^3 + O(x^5) - 2x}{x^3} = -\frac{8}{3}$$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$

$f(27) = 3$, $f'(27) = \frac{1}{27}$

Het 1e orde Taylorpolynoom is $P_1(x) = f(27) + f'(27)(x-27)$

$= 3 + \frac{1}{27}(x-27)$ en $P_1(26) = 80/27$.

Dus is $f(26) - P_1(26) = \sqrt[3]{26} - \frac{80}{27} = \frac{f''(\theta)}{2}(26-27)^2$

$= -\frac{1}{9}\theta^{-5/3}$ waarbij $26 < \theta < 27$.

Enerzijds is, omdat $\theta < 27$: $-\frac{1}{9}\theta^{-5/3} < -\frac{1}{9}\cdot 27^{-5/3} = -\frac{1}{2187}$ $< -\frac{1}{3000}$. Anderzijds is, omdat $\theta > 26$:

$-\frac{1}{9}\theta^{-5/3} > -\frac{1}{9}\cdot 26^{-5/3} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{26}}{26^2} > -\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{676} > -\frac{1}{200}$.