Analyse 1 na.

1.a. De grafiek van f_{ab} heeft een verticale asymptoot $x=3$ omdat $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+2x-16}{x-3} = \pm\infty$ (m.a.w. de teller $= 2\cdot 3^2+2\cdot 3-16 \neq 0$ voor $x=3$) en er is een scheve asymptoot voor $x\to\infty$. Staartdelen geeft

$$f_{ab}(x) = \frac{2x^2+2x-16}{x-3} = 2x+8+\frac{8}{x-3} \quad (x>2)$$ dus

$y = 2x+8$ is een scheve asymptoot

1b. Omdat ~~[illegible]~~ de afzonderlijke "deelfuncties" van $f_{ab}(x)$ diff.baar op zijn domein zijn (polynoom resp. rationale functie) moeten we alleen kijken voor welke a, b $f_{ab}(x)$ diff.baar in $x=2$ is:

① Continuïteit

$$\lim_{x\uparrow 2} (x^2+ax+b) = \lim_{x\downarrow 2} \frac{3x^2-8x}{x-3} = f(2)$$

geeft $\quad 2a+b=0$

② diff.baarheid

$$\lim_{x\uparrow 2} [x^2+ax+b]' = \lim_{x\downarrow 2} \left[2x+8+\frac{8}{x-3}\right]'$$

geeft $\quad 4+a = \lim_{x\downarrow 2} 2-\frac{8}{(x-3)^2} = -6$

dus, $a=-10$, $b=20$ is $f_{ab}(x)$ diff.baar in $x=2$.
alleen voor

1c. Kritieke punten: $f'_{ab}(x) = \begin{cases} 2x & x<2 \\ 2-\frac{8}{(x-3)^2} & x>2 \end{cases}$

$f'_{ab}(x) = 0$ als $x=0$ of $(x-3)^2=4$, $x>2$
dus $x=5$.

Singuliere punten $\quad x=2,\ x=3$
(Geen randpunten).

Tek.schema f'_{ab} $\quad$ $\underset{}{-}\ \big|_{0}\ +\ \big|_{2}\ -\ \big|_{3}\ -\ \big|_{5}\ +$

f heeft een locaal minimum in $x=0$: $f(0)=0$
in $x=5$: $f(5)=22$
en een locaal maximum in $x=2$: $f(2)=4$ en
f continu in $x=2$!

1d. De extremen zijn niet globaal want
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (ook bij de verticale asymptoot gaat $f(x)$ naar ∞ en $-\infty$).

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+3x) - \sin(3x^2)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(3x-\frac{1}{2}(3x)^2\right)-3x^2+O(x^4)}{1+\frac{1}{2}x^3-1+O(x^6)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\frac{9}{2}x^3-3x^2+O(x^4)}{\frac{1}{2}x^3+O(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{2}\cancel{x}+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x^3)} = -9.$$

3.a. Alternerende reeks $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n$ met $b_n = \frac{1}{-\sqrt{n}+n} > 0$

Omdat verder $\cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-\sqrt{n}+n} =$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{+1}{n(1-1/\sqrt{n})} = 0$ en $\cdot\ b_{n+1} < b_n$

nl: $[-\sqrt{x}+x]' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}+1 \cancel{>} 0$ voor $x\geq 2$ (dus $\frac{1}{-\sqrt{x}+x}$ ~~stijgt~~ daalt monotoon voor $x\geq 2$) convergeert de reeks volgens het crit. van Leibniz. De reeks convergeert niet absoluut, volgens de limiettest omdat $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-\sqrt{n}+n} : \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-\sqrt{n}} = 1$

en $\sum \frac{1}{n}$ divergeert.
De reeks convergeert voorwaardelijk.

b. Gebruik de verhoudingstest : $a_n = \frac{(4n)!}{n!^2(2n)!100^n}$

en $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+4)!\,n!^2(2n)!\,100^n}{(4n)!\,(n+1)!^2(2n+2)!\,100^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^2(2n+2)(2n+1)100} = \frac{4\cdot4\cdot4\cdot4}{2\cdot2\cdot100} = \frac{64}{100} < 1$$

dus de reeks convergeert absoluut.

4a. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{(x^2+9)(x-3)^2}\,dx = \int \frac{ax+b}{x^2+9} + \frac{cx+d}{(x-3)^2}\,dx$

(breuksplitsen). $\quad (ax+b)(x-3)^2 + (cx+d)(x^2+9) = 2x^3$

geeft: $\quad a+c=2, \quad -6a+b+d=0,$

$\quad 0=-6b+9a+9c, \quad 9b+9d=0$

en dus $\quad a=0,\ b=3,\ d=-3,\ c=2.$ De integraal wordt dus

$$\int \frac{3}{x^2+9} + \frac{2x-3}{(x-3)^2}\,dx = \int \frac{3}{x^2+9} + \frac{2(x-3)}{(x-3)^2} + \frac{3}{(x-3)^2}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + 2\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C.$$

b. $\displaystyle\int x^2\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \int x\cdot\sin(2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \left(-x\cdot\frac{1}{2}\cos(2x) + \int 1\cdot\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

c. $\cos(2x) = u, \quad du = -2\sin(2x)\,dx$

$$\int \frac{\sin^3(2x)}{\cos^2(2x)}\,dx = \int \frac{1-\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)}\cdot\sin(2x)\,dx = \int \frac{1-u^2}{u^2}\cdot -\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{2u} + \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2\cos(2x)} + C.$$

5a. $f(x) = \arctan(x), \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f(1) = \pi/4, \quad f'(1) = 1/2, \quad f''(1) = -1/2$

$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$

$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$

$\quad = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.$

b. $P_1(1{,}1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{20}.$

$\arctan(1{,}1) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{20} = f(1{,}1) - P_1(1{,}1) = \frac{1}{2}f''(c)(1{,}1-1)^2$

$= -\dfrac{c}{100(1+c^2)^2}$ met $1 < c < 1{,}1$

Aan te tonen: (1) $-\frac{c}{100(1+c^2)^2} < 0$, dit is meteen duidelijk. $(c>0)$

(2) $\frac{c}{100(1+c^2)^2} < \frac{1}{400}$ voor $1<c<\frac{11}{10}$.

dus $(1+c^2)^2 > 4c$. Dit kan op verschillende manieren, bv. met de afgeleide:

$$\left[\frac{c}{(1+c^2)^2}\right]' = \frac{(1+c^2)^2\cdot 1 - c\cdot 2(1+c^2)\cdot 2c}{(1+c^2)^4} = \frac{1-3c^2}{(1+c^2)^3} < 0$$

dus $\max\limits_{1\leq c\leq 1{,}1} \frac{c}{(1+c^2)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$. en gelijkheid geldt alleen voor $c=1$.

of zo: $\left[(1+c^2)^2 - 4c\right]' = 4c(1+c^2) - 4 > 0$ voor $c \geq 1$ en $(1+c^2)^2 - 4c = 0$ voor $c=1$ dus $(1+c^2)^2 - 4c > 0$ voor $c>1$.

Of zo: $(1-c^2)^2 \geq 0$, dus $(1+c^2)^2 > 4c^2 > 4c$
voor $c \neq 1$ voor $c>1$.