

HERTENTAMEN ANALYSE IA

9 december 2002, 10:00-12:00

1. Voor zekere natuurlijke getallen $a, b \geq 0$ en voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+a)(2n+b).$$

- (a) Bepaal a en b en bewijs de juiste bewering met volledige inductie.
(b) Bereken $1^2 + 2^2 + \dots + 11^2$.

2. Bereken en teken in het complexe vlak.

- (a) De verzameling $z \in \mathbb{C}$ met

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 2.$$

- (b) De nulpunten van $z^3 + iz^2 + 4z + 4i = 0$. (Aanwijzing: vind eerst een nulpunt door proberen.)

3. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een gegeven differentieerbare functie. Geef de limietdefinitie voor de afgeleide van f in een punt $x = a$ en bereken de volgende limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

4. Formuleer de middelwaardestelling en pas deze stelling toe om aan te tonen dat als voor $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geldt dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is f een stijgende functie op $[a, b]$.
5. Laat zien dat de krommen gegeven door $x^2 + y^2 = r^2$ en $ax + by = 0$ elkaar loodrecht snijden.
6. Gegeven is een uurwerk dat de juiste tijd aangeeft. De grote wijzer is 8 mm lang en de kleine wijzer is 4 mm lang. Hoe snel verandert de afstand tussen de uiteinden van de wijzers als het 1 uur 's middags is.