

DEELTENTAMEN ANALYSE IB

20 januari 2003, 9:00-11:00

1. Bewijs met wathematische inductie dat voor positieve gehele getallen n geldt dat

$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!.$$

2. Gegeven is een positief geheel getal n . Benader de volgende integraal

$$\int_0^1 e^{3x} dx$$

door een Riemannse som met $(n + 1)$ -termen. Bereken de som en bepaal de limiet als n naar oneindig gaat.

3. Laat h en r positieve getallen zijn. Teken het volgende gebied

$$V(h) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - r)^2 \leq r^2\} \cap \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq h\}$$

en bereken het volume van $V(h)$ als functie van h .

4. Laat a en b positieve gehele getallen met $a > b$. Definieer voor $n = 0, 1, 2, \dots$ rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ met

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & a_0 &= a, \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, & b_0 &= b. \end{aligned}$$

Toon aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

5. Bereken de volgende limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e(1 - \frac{x^2}{2})}{\tan^4 x}.$$

6. Bepaal het convergentieinterval van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 1)^n}{(n + 1)!}$$

en de som voor die waarden van x , waarvoor de reeks convergeert.

Werk netjes en presenteer uw antwoorden volledig. Succes!