ANALYSE 1, VOLLEDIG TENTAMEN
dinsdag 9 augustus 2005, 10.00–13.00 uur

- Vermeld niet alleen uw naam, maar ook uw studentnummer, studie(s) en docent.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is toegestaan, een formulekaart niet.
- Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven. Vergeet de achterkant niet.

---

1. (a) Formuleer de middelwaardestelling (Mean value theorem).

   (b) Bepaal de afgeleide van de functie $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
   $$f(x) = \ln\,(1 + \sin x).$$

   (c) Laat zien dat
   $$\ln\,(1 + \sin x) < x,$$
   voor x met $0 < x < \pi$.

2. Bewijs (bijvoorbeeld met de binomiaalformule) voor $n \geq 1$ de formule
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = 0.$$

3. Bepaal
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x + 1)(\cos 2x) - 1 - x}{e^{3\,x^2} - 1}$$

4. Bereken de volgende primitieven:
$$\int x(\ln\, x)^3 dx, \qquad \int \frac{x dx}{(x^2 - 1)}.$$

5. (a) Geef de formule van De Moivre.

   (b) Bepaal voor $\theta \in \mathbb{R}$ de eindige som $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.
   Bedenk eventueel eerst een formule voor de som $\sum_{k=0}^{n} z^k$.

   (c) Bepaal $\theta \in \mathbb{R}$ zodat $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = 0$.

6. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie. Geef aan of er sprake is van absolute convergentie, (gewone) convergentie of divergentie.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(\ln(n-1))}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \cos n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{(n^2+1)}}{5^{n^2} - 3^{n^2}}.$$

7. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = \sqrt{((\ln|x|)^2 - 1)(x+1)}.$$

   (a) Bereken het domein van f.

   (b) Geef de lineaire benadering van f in het punt $x = e^2$.

8. Gegeven een getal $c \in \mathbb{R}$ en de functie

$$f(x) = \begin{cases} -(x-c)^2(x-2c) & \text{voor } x < 0, \\ (x+c)^2(x+2) & \text{voor } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Voor welke c is f continu in 0?

   (b) Voor welke c is f differentieerbaar in 0?

Normering$= 1 + \frac{15+10+10+10+10+10+10+15}{10}$