

Hertentamen Analyse I

8 juni 2006, 10-13h

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

- Bepaal de eventuele snijpunten van de grafiek van f met X en Y as.
- Bepaal de asymptoten van de grafiek van f .
- Bepaal de extrema van f (plaats, aard).
- Schets de grafiek van f .

2. Bereken de volgende limieten

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{e^{2x} + e^x + 1} - e^x$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + x^2)^{1/x} - 1}{x}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^x \cos^2 x)}{x}$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

waarbij a_n gedefinieerd is via de volgende recursie $a_0 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

3. Bereken de volgende onbepaalde integralen

a)

$$\int \frac{\sin x}{1 - \cos(2x)} dx$$

b)

$$\int \frac{x(x-1)}{x^2 + 2x + 3} dx$$

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{voor } x > 0 \\ 0 & \text{voor } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Toon aan dat f continu is in 0
 - b) Toon aan dat alle afgeleiden van f in nul gelijk zijn aan nul.
 - c) Wat impliceert onderdeel b) voor de Taylor ontwikkeling van f rond $x = 0$?
5. Los het volgende beginvoorwaarde probleem op

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 1$$