

# == Hertentamen Analyse 1 ==

Dinsdag 25 maart 2008, 14.00-17.00u

---

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
  - Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
  - Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
  - Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.
- 

1.) De functie  $f$  is gegeven door het voorschrift

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{voor } x > 0, \\ \frac{x^2+1}{x+2}, & \text{voor } x \leq 0 \text{ en } x \neq -2. \end{cases}$$

- Toon aan, dat  $f$  continu is op  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .
  - Bepaal de horizontale, scheve en verticale asymptoot van  $f$ .
  - Bereken de afgeleide functie  $f'$  en geef diens domein. Is  $f$  differentieerbaar in 0? Beargumenteer het antwoord!
  - Laat zien, dat  $f$  convex is op  $(0, \infty)$ .
  - Laat  $g$  de beperking zijn van de functie  $f$  tot het interval  $(-2, \infty)$ . Beargumenteer dat  $g$  inverteerbaar is, bepaal het domein van  $g^{-1}$  en bereken een expliciete uitdrukking voor het functievoorschrift van  $g^{-1}$ .
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \sin n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n!}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

3.) Bereken

$$(a) \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (b) \int_0^2 \frac{3x^2 - 7x + 7}{(x-3)(x^2+4)} dx$$

en de oneigenlijke integraal

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2} dx.$$

**\*\*\* Zie ommezijde voor vervolg \*\*\***

4.) De functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is gegeven door

$$f(x) = \int_0^{2x^3 - 3x^2 - 12x} e^{\sin^6 t} dt.$$

- (a) Beargumenteer, dat  $f$  differentieerbaar is op  $\mathbb{R}$  en bereken  $f'$ .
- (b) Bepaal de plaats en aard (lokaal/globaal minimum/maximum) van de extremen van  $f$ . (*NIET hun grootte!*)
- (c) Gebruik de Middelwaardstelling om een schatting te geven van het verschil tussen de waarden van  $f$  in het lokale maximum en het lokale minimum.

5.) (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 2(2n-1)!}{(2n)! 3^n} x^n.$$

- (b) Gebruik standaard Taylorreeksen om te laten zien dat voor  $0 \leq x \leq 1$  de machtreeks uit (a) convergeert naar

$$\cos(\sqrt{x}) - \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) - 1.$$

- (c) Bepaal

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) - 1}{x}.$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten	3+3+3+2+3	2+2+3	3+3+3	3+3+1	3+3+2