== Hertentamen Analyse 1 ==

Dinsdag 25 maart 2008, 14.00-17.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

1.) De functie f is gegeven door het voorschrift

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{voor } x > 0, \\ \frac{x^2+1}{x+2}, & \text{voor } x \leq 0 \text{ en } x \neq -2. \end{cases}$$

(a) Toon aan, dat f continu is op $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(b) Bepaal de horizontale, scheve en vertikale asymptoot van f.

(c) Bereken de afgeleide functie f' en geef diens domein. Is f differentieerbaar in 0? Beargumenteer het antwoord!

(d) Laat zien, dat f convex is op $(0, \infty)$.

(e) Laat g de beperking zijn van de functie f tot het interval $(-2, \infty)$. Beargumenteer dat g inverteerbaar is, bepaal het domein van g^{-1} en bereken een expliciete uitdrukking voor het functievoorschrift van g^{-1}.

2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \sin n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

3.) Bereken

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2-7x+7}{(x-3)(x^2+4)}dx$

en de oneigenlijke integraal

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1-\ln x}{x^2}dx$.

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

4.) De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \int_0^{2x^3 - 3x^2 - 12x} e^{\sin^6 t} dt.$$

(a) Beargumenteer, dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bereken f'.

(b) Bepaal de plaats en aard (lokaal/globaal minimum/maximum) van de extremen van f. *(NIET hun grootte!)*

(c) Gebruik de Middelwaardestelling om een schatting te geven van het verschil tussen de waarden van f in het lokale maximum en het lokale minimum.

5.) (a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 2\,(2n-1)!}{(2n)!\,3^n} x^n.$$

(b) Gebruik standaard Taylorreeksen om te laten zien dat voor $0 \leq x \leq 1$ de machtreeks uit (a) convergeert naar

$$\cos(\sqrt{x}) - \ln(1 + \frac{x}{3}) - 1.$$

(c) Bepaal

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \ln(1 + \frac{x}{3}) - 1}{x}.$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten	3+3+3+2+3	2+2+3	3+3+3	3+3+1	3+3+2

1.) (a) Op ieder van de intervallen $(0,\infty)$, $(-\infty,-2)$ en $(-2,0)$ is f een samenstelling van continue functies en daarom continu. In 0:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\pi}\arctan y = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

en

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

Dus de linker en rechter limiet van f in 0 bestaan en zijn gelijk, dus f is ook continu in 0.

(b) Horizontale asymptoot:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi}\arctan y = 0,$$

dus f heeft een horizontale asymptoot voor x naar oneindig en deze is de lijn $y = 0$.
Scheve asymptoot:

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (ax+b)\Big) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{(x-2)(ax+b)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-a)x^2 - (2a+b)x + 1 - 2b}{x+2}.$$

Deze limiet is nul dan en slechts dan als $1-a=0$ en $2a+b=0$, ofwel $a=1$ en $b=-2$.
Dus de lijn $y = x-2$ is een scheve asymptoot van f voor x naar $-\infty$.
Verticale asymptoot:

$$\lim_{x\uparrow -2} f(x) = \lim_{x\uparrow -2} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty$$

en

$$\lim_{x\downarrow -2} f(x) = \lim_{x\downarrow -2} \frac{x^2+1}{x+2} = \infty,$$

dus de lijn $x=-2$ is een verticale asymptoot van f bij $x=-2$. Verder zijn er geen verticale asymptoten.

(c) Op $(0,\infty)$ is f volgens de kettingregel differentieerbaar en

$$f'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{\pi}\frac{-1}{x^2+1}.$$

Ook op $(-\infty,-2)$ en $(-2,0)$ is f differentieerbaar en

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}.$$

Voor de differentieerbaarheid in 0 bekijken we

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}}{x}.$$

Met de keuze $\tan\theta = x$ zien we eenvoudig in een driehoek dat $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{x}$ en dus

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\theta\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\pi}\arctan\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)-\frac{1}{2}}{\tan\theta} = \lim_{\theta\downarrow 0} -\frac{1}{\pi}\frac{\theta}{\tan\theta} = -\frac{1}{\pi}.$$

Verder,

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{4}.$$

De limiet van $(f(x)-f(0))/x$ voor x naar 0 bestaat dus niet en dus is f niet differentieerbaar in 0. Conclusie: het domein van f' is $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ en

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0),\\ \frac{1}{\pi}\frac{-1}{x^2+1}, & x\in(0,\infty). \end{cases}$$

(d) Uit (c) volgt voor $x>0$ dat

$$f''(x) = \frac{1}{\pi}(x^2+1)^{-2}2x = \frac{2x}{\pi(x^2+1)^2}$$

en dit is >0. Dus f is convex op $(0,\infty)$.

(e) Het bereik van $\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{x})$ op $(0,\infty)$ is $(0,\frac{1}{2})$ en van $\frac{x^2+1}{x+2}$ op $(-2,0]$ is dat $[\frac{1}{2},\infty)$. We lossen op:

$$y = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{x})$$

met $y\in(0,\frac{1}{2})$. Dan $\tan(\pi y) = \frac{1}{x}$, dus $x = \frac{1}{\tan\pi y}$ en deze oplossing is uniek en in $(0,\infty)$. Voor $y\in[\frac{1}{2},\infty)$ lossen we op:

$$y = \frac{x^2+1}{x+2}.$$

We krijgen $x^2-yx+1-2y=0$. Er is precies één oplossing met $x\in(-2,0]$, namelijk $x = \frac{y-\sqrt{y^2-4(1-2y)}}{2}$. Dus g is inverteerbaar en

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\tan\pi y} & y\in(0,\frac{1}{2}),\\ \frac{y-\sqrt{y^2+8y-4}}{2}, & y\in[\frac{1}{2},\infty). \end{cases}$$

2.) (a) $\ln n\le\sqrt{n}$, dus $|\frac{\ln n}{n^2}\sin n|\le\frac{1}{n^{3/2}}$ voor $n\ge 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ is convergent. Wegens het vergelijkingscriterium is $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\sin n$ absoluut convergent en dus ook convergent.

(b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}e^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(-1)^n e^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1} = 0 < 1$, dus volgens het quotientencriterium is de reeks absoluut convergent en dus convergent.

(c) Dit is een alternerende reeks. $\arctan(\frac{1}{n})$ is ≥ 0 voor alle n, $\arctan(\frac{1}{n})$ is dalend in n (want arctan is een stijgende functie), $\lim_{n\to\infty}\arctan(\frac{1}{n}) = 0$ (want $\arctan 0 = 0$ en arctan is continu). Uit Leibniz' criterium volgt dat de reeks convergent is. Omdat de afgeleiden van arctan in 0 gelijk is aan 1, is $\arctan x \geq x/2$ voor x dicht bij nul en dus $\arctan(\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2n}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is niet convergent, dus $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\frac{1}{n})$ is niet convergent vanwege het vergelijkingscriterium en dus is de alternerende reeks niet absoluut convergent. Dus: voorwaardelijk convergent.

3.) (a) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$
substitueer $x = \sin\theta$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$, $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$, want voor $\theta \in [0, \pi/6]$ is $\cos\theta \geq 0$,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/6} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = (\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta)|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

(b) Met breuksplitsen:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{(A+B)x^2 + (C-3B)x + 4A - 3C}{(x-3)(x^2+4)},$$

dus we moeten kiezen:

$$A + B = 3, \quad C - 3B = -7, \quad 4A - 3C = 7,$$

ofwel

$$C = -1, \quad B = 2, \quad A = 1.$$

Dus

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\ln|x-3| + \ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}\right)|_0^2 \\ &= -\ln 3 + \ln 8 - \ln 4 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \ln\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\ln x}{x}|_1^R - \int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} = 0, \end{aligned}$$

waar we partiële integratie hebben gebruikt.

4.) (a) $e^{\sin^6 t}$ is een continue functie, want samenstelling van continue functies. Volgens de hoofdstelling van de integraalrekening/analyse is dan $\int_0^y e^{\sin^6 t}\,\mathrm{d}t$ een differentieerbare functie van y. Samengesteld met de differentieerbare functie $2x^3 - 3x^2 - 12x$ volgt met de kettingregel dat f differentieerbaar is. Ook volgt uit de hoofdstelling en de kettingregel dat

$$f'(x) = e^{\sin^6(2x^3-3x^2-12x)}(6x^2 - 6x - 12).$$

(b) Omdat f overal differentieerbaar is kunnen de extremen van f alleen optreden in punten waar $f'(x) = 0$. Ofwel $6x^2 - 6x - 12 = 0$, dus $x = 2$ of $x = -1$. Uit een tekenschema van f' is meteen te zien dat f een lokaal maximum heeft in $x = -1$ en een lokaal minimum in $x = 2$. Verder wordt $f(x)$ willekeurig groot voor $x \to \infty$ en willekeurig klein (negatief) voor $x \to -\infty$, dus de extremen zijn lokaal, niet globaal.

(c) Uit de middelwaardestelling volgt dat er een c tussen -1 en 2 bestaat zo dat

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - -1} = f'(c).$$

Omdat $6x^2 - 6x - 12$ zijn nulpunten heeft in -1 en 2, is deze maximaal in $x = 1/2$ en daar is het maximum $13\frac{1}{2}$. Dus $|f'(c)| \leq e^1 13\frac{1}{2}$. Daarom is

$$|f(2) - f(-1)| \leq 3|f'(c)| \leq \tfrac{81}{2}e.$$

5.) (a) Er geldt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} + 2(2n+2-1)!}{(2n+2)!3^{n+1}} \frac{(2n)!3^n}{3^n + 2(2n-1)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2(2n+1)!}{3^n + 2(2n-1)!} \frac{1}{3(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n-1)!} + 2(2n+1)2n}{\frac{3^n}{(2n-1)!} + 2} \frac{1}{3(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n^2(2n-1)!} + 2(2+\frac{1}{n})2}{\frac{3^n}{(2n-1)!} + 2} \frac{1}{3(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{8}{2}\frac{1}{12} = 1/3,
\end{aligned}$$

dus de convergentiestraal is 3.

(b) Met de standaard Taylorreeksen van $\cos x$ en $\ln(1+x)$ vinden we

$$\begin{aligned}
\cos(\sqrt{x}) - \ln(1+\frac{x}{3}) - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x/3)^{n+1}}{n+1} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x/3)^{n}}{n} - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n \Big(\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{3^n n}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n + 2(2n-1)!}{(2n)!3^n} x^n.
\end{aligned}$$

(c) Met behulp van (b) vinden we

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \ln(1+\frac{x}{3}) - 1}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{(-1)^1 \frac{3+2(2-1)!}{(2)!3} x + O(x^2)}{x} = -\frac{5}{6}.$$

(Alternatief: met l'Hôpital.)