

Tentamen Analyse 1NA

Maandag 21 maart 2011, 14:00-17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.
-

- 1.) De functie f heeft als domein de vereniging van de intervallen $(-\infty, 1)$ en $(1, \infty)$ en is daar gegeven door het voorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1}, & \text{voor } x \leq -1, \\ \frac{2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x-1}, & \text{voor } x > -1, x \neq 1. \end{cases}$$

- (a) Is f continu in -1 ? Beargumenteer het antwoord.
- (b) Bepaal de afgeleide van f op zijn domein, behalve in het punt $x = -1$.
- (c) Is f differentieerbaar in -1 ? Beargumenteer het antwoord.
- (d) Toon aan dat f strikt dalend is op $(-\infty, -1]$.
- (e) Bepaal alle extrema van f op zijn domein. Geef niet alleen plaats en grootte, maar vermeld ook of het om een maximum of een minimum gaat en of het betreffende extremum lokaal of globaal (absoluut) is.
- (f) Bepaal alle asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van f .
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen gebruikt worden.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right),$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right),$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{e} \right)^n \frac{n-1}{n+1}.$$

Zie ommezijde

3.) Bepaal de verzameling van alle x waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n(n+1)} x^n$$

convergeert.

4.) Bereken de volgende bepaalde dan wel onbepaalde integralen:

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 4 \cos^2 x} dx,$$

(b)

$$\int x \arctan x dx,$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 6x + 12}{(x+2)(x+3)(x+4)} dx.$$

5.) Laat K de kromme in het vlak zijn, gedefinieerd door:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos y + xy = 1\}.$$

Er bestaan (dit hoeft niet bewezen te worden) een open interval I dat 1 bevat en een door K impliciet gedefinieerde oneindig vaak differentieerbare functie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, met $f(1) = 0$, zodanig dat $(x, f(x))$ op de kromme K ligt, voor alle x in I .

(a) Bepaal $f'(1)$.

(b) Bepaal het tweede orde Taylorpolynoom van f in 1.

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	25	21	7	24	13	90
	(3+3+4+3+7+5)	(5+10+6)	7	(8+8+8)	(7+6)	

Cijfer = (Totaal aantal punten)/9.