Analyse 1NA – tentamen 8 juni 2012

— Antwoorden —

1 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2} & x<0,\ x\neq -2 \\ 2 & x=0 \\ 2-x^2e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

(a) $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}(2-x^2e^{-x}) = 2-0\cdot e^0 = 2$

en

$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2} = \dfrac{4}{2} = 2,$

dus $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0)$, dus f continu in 0.

(b) $\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{\frac{2h^2+5h+4}{h+2}-2}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{2h^2+5h+4-2h-4}{h(h+2)}$

$= \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{2h^2+3h}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \dfrac{2h+3}{h+2} = 3/2.$

en

$\lim_{h\uparrow 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \dfrac{2-h^2e^{-h}-2}{h} = \lim_{h\uparrow 0} -he^{-h} = 0,$

dus f niet differentieerbaar in $x=0$.

(c) Voor $x<0$, $x\neq -2$:

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(x+2)-(2x^2+5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+13x+10-2x^2-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$$

en voor $x>0$:

$$f'(x) = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} = x(x-2)e^{-x}.$$

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2-x^2e^{-x}) = 2-0 = 2$

(exp "wint van" polynoom), dus horizontale asymptoot $y=2$ (voor $x\to\infty$).

Voor $x\to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x+4-(ax+b)(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-ax^2+5x+4-(2a+b)x-2b}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(5-2a-b)x+4-2b}{x+2}$$

kies $a=2$

kies $b=1$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+2} = 0,$$

dus $y=2x+1$ is schuine asymptoot voor $x\to-\infty$.

Bij $x=-2$ is de enige singulariteit en daar is

$$\lim_{x\downarrow -2} f(x) = \lim_{x\downarrow -2} \frac{2x^2+5x+4}{x+2};$$

teller gaat naar $2\cdot 4 - 10 + 4 = 2$ en noemer $\downarrow 0$, dus

$$\lim_{x\downarrow -2} f(x) = \infty$$

en dus is $x=-2$ verticale asymptoot.

$\boxed{1}$ (e) Stationaire punten:

$x>0$: $x(x-2)e^{-x}=0$: $x=0$ of $x=2$, dus $\boxed{x=2}$.

$x<0$: $2x^2+8x+6=0$: $0=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$,

dus $\boxed{x=-3}$ en $\boxed{x=-1}$.

singulier punt: $\boxed{x=0}$.

Tekenschema afgeleide:

x		-3		-2		-1		0		2	
$\frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$	+ + +	0	−	*	− −	0	+ +	+ + +	+ +	+	+ + + +
x	−		− −		− −		−	0	+ + +		+ + +
$x-2$	−		−		−		−		− −	0	+ + + +
$x(x-2)e^{-x}$	+		+ + +		+ +		+ +	0	− − −	0	+ + + +
$f'(x)$	+ + +	0	− −	*	− −	0	+ +	*	− − −	0	+ + + +
		$\wedge$				$\vee$		$\wedge$		$\vee$	

Merk op: wegens (a) is f continu in 0.

Extremen: max bij $x=-3$, $f(-3)=-7$

min bij $x=-1$, $f(-1)=1$

max bij $x=0$, $f(0)=2$

min bij $x=2$, $f(2)=2-4e^{-2}$.

Wegens (d) is $\lim_{x\downarrow -2} f(x)=\infty$ en net zo is $\lim_{x\uparrow -2} f(x)=-\infty$. Alle extremen zijn dus lokaal.

$\boxed{2}$ (a)

Er geldt dat $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (standaard limiet) dus de termen gaan niet naar nul, dus de reeks is divergent.

2 (b) Omdat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{e^{n+1}+2^{n+1}}{e^{2n+2}-(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{e^n+2^n}{e^{2n}-n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}+2^{n+1}}{e^{2n+2}-(n+1)^2}\,\frac{e^{2n}-n^2}{e^n+2^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}+2^{n+1}}{e^n+2^n}\cdot\frac{e^{2n}-n^2}{e^{2n+2}-(n+1)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e+2\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{2}{e}\right)^n}\cdot\frac{1-\frac{n^2}{e^{2n}}}{e^2-\frac{(n+1)^2}{e^{2n+2}}}\right| = \frac{e+0}{1+0}\cdot\frac{1-0}{e^2-0}$$

$$= \frac{1}{e} < 1,$$

volgt uit de ratiotest dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+2^n}{e^{2n}-n^2}$ absolunt convergent is.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ is een alternerende reeks.

Er geldt

- $\frac{1}{n+\sqrt{n}} > 0$ voor alle n,
- $n \mapsto n+\sqrt{n}$ is stijgend, dus $n \mapsto \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ dalend
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$,

dus volgens de test voor alternerende reeksen is deze reeks convergent.

Verder, $n+\sqrt{n} \le 2n$ voor $n \ge 1$, dus

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\right| \ge \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}$$

en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ is divergent, dus $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\right|$ is divergent. M.a.w. de reeks is niet absolunt convergent en dus voorwaardelijk convergent.

3 Uit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n+1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\,\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}} = 1$$

volgt dat de convergentie straal gelijk is aan $\frac{1}{1}=1$.

Voor $x=1$: $\frac{n+1}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent, dus $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ divergent.

Voor $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}(-1)^n$ is alternerend met

- $\frac{n+1}{n^2+1} > 0$
- $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ heeft $f'(x) = \frac{x^2+1-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \le 0$ voor $x \ge 1$, dus f is dalend en dus $n \mapsto \frac{n+1}{n^2+1}$ is dalend.
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

Dus, volgens het criterium voor alternerende reeksen, is deze reeks convergent. Het convergentie interval van de machtreeks is dus $[-1,1)$.

4 (a) $x^5 + x + \cos y + y = 1$.

Impliciet differentiëren van

$$x^5 + x + \cos(f(x)) + f(x) = 1$$

geeft

$$5x^4 + 1 - \sin(f(x))\, f'(x) + f'(x) = 0.$$

Invullen van $x=0$: $f(0)=0$ en

$$0 + 1 - (\sin 0)\, f'(0) + f'(0) = 0$$

ofwel

$$f'(0) = -1.$$

(b) Nog eens impliciet differentiëren,

$$20x^3 - \cos(f(x))\, f'(x)^2 - \sin(f(x))\, f''(x) + f''(x) = 0.$$

Invullen van $x=0$: $f(0)=0$ en $f'(0)=-1$:

$$0 - (\cos 0)(-1)^2 - (\sin 0)\, f''(0) + f''(0) = 0$$

ofwel

$$-1 + f''(0) = 0$$

ofwel $f''(0) = 1$.

5 (a) Met partiële integratie:

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{1}{1+x^2}\,2x\,dx$$

$$= \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2+2}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 2 - \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - (2x - 2\arctan x)\Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\arctan 1$$

$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

(b) Met de substitutieregel,

$$\int \frac{\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{u=\sqrt{x}\\ du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} \int 2\cos(1+u)\,du$$

$$= 2\sin(1+u) + C = 2\sin(1+\sqrt{x}) + C.$$

(c) Met breuksplitsen:

$$\frac{4x^2-2}{(4x^2+4x+2)(x+1)} = \frac{Ax+B}{4x^2+4x+2} + \frac{C}{x+1},$$

dan

$$(Ax+B)(x+1) + C(4x^2+4x+2) = 4x^2 - 2$$

ofwel

$$(A+4C)x^2 + (A+B+4C)x + B + 2C = 4x^2 - 2 \quad \text{voor alle } x,$$

dus

$$\begin{cases} A+4C = 4 & (1) \\ A+B+4C = 0 & (2) \\ B+2C = -2 & (3) \end{cases}.$$

Hieruit: (2) − (1): $B = -4$; (3): $2C = -2 - B = 2$ dus $C = 1$;

(1): $A = 0$.

Dus

$$\int \frac{4x^2-2}{(4x^2+4x+2)(x+1)}\,dx = \int \frac{-4}{4x^2+4x+2} + \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{-4}{(2x+1)^2+1} + \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -2\arctan(2x+1) + \ln|x+1| + C.$$