Volledig Hertentamen Analyse 2

Vrijdag 20 augustus 2004, 10:00-13:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de versie van het tentamen dat u maakt (volledig of deel), de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!

Het tentamen bestaat uit **drie** opgaven.
Succes!

1.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 4\}, \\ \partial R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 4\}, \text{ de rand van } R. \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x,y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f negen kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f vier extrema heeft in R. Zijn deze extrema lokale maxima of lokale minima? Licht uw antwoord toe.

(d) De beperking van de functie f tot ∂R heeft vier extrema. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.

(e) De beperking van de functie f tot $\overline{R}$, i.e. R verenigd met de rand ∂R, heeft acht extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).

2.) Laat $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ en het oppervak S in $\mathbf{R}^3$ gegeven zijn door

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 - 2y^2 + z^2 - xz, \\ S &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \leq 1\}, \end{aligned}$$

waarbij S georiënteerd is door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ dat van de oorsprong af gericht is.

(a) Bereken $\mathrm{grad} f = \nabla f$ en $\mathrm{div}(\nabla f)$.

(b) Bereken de flux

$$\int_S \nabla f \bullet d\mathbf{S} = \int_S \nabla f \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$

3.) Zij $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \; 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. C is de rand van D met oriëntatie met de wijzers van de klok mee en laat $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x,y) = -x^2 y \; \mathbf{i} \; + \; y(xy+1) \; \mathbf{j}.$$

(a) Laat zien met behulp van integratie in $\mathbf{R}^2$, dat de oppervlakte van D gelijk is aan 2π.

(b) Bereken de circulatie

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Zij $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \; x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\}$ met oriëntatie gegeven door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ met niet-negatieve z-component. Laat $\mathbf{G} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{G}(x,y,z) = -x^2 y \; \mathbf{i} \; + \; (xy^2 + y) \; \mathbf{j} \; + \; xy \sin z \; \mathbf{k}.$$

(c) Schets S en geef duidelijk de oriëntatie aan op S en de oriëntatie op de rand van S geïnduceerd door de oriëntatie van S.

(d) Bereken curl $\mathbf{G}$.

(e) Bereken de flux

$$\int_S \text{curl } \mathbf{G} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}} \; dS.$$