Volledige Tentamen Analyse 2

Maandag 17 mei 2004, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de versie van het tentamen dat u maakt (volledig of deel), de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!

Succes!

1.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = y(y - x^2 + 1)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 1\}, \\ \partial R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}, \text{ de rand van } R. \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x,y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f drie kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f één extremum heeft in R. Is dit extremum een lokaal maximum of lokaal minimum? Licht uw antwoord toe.

(d) De beperking van de functie f tot ∂R heeft zes extrema. Bereken van deze hun plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte (functiewaarde).

(e) De beperking van de functie f tot $\overline{R}$, i.e. R verenigd met de rand ∂R, heeft vier extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).

2.) Laat $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ |z| \leq \frac{1}{2}\}$.

(a) Bereken het volume van D.

Laat $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ |z| \leq \frac{1}{2}\}$ met een van de oorsprong weggericht normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$.

(b) Bepaal de flux uit S van het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = 3xy^2\mathbf{i} + (z^2 - y^3)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, dat wil zeggen

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Zij $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gedefinieerd door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z-2)\cos y\ \mathbf{i}\ +\ (x\sin(\tfrac{\pi}{4}z) - x(z-2)\sin y)\mathbf{j}\ +\ x\cos y\ \mathbf{k}.$$

(a) Bereken curl $\mathbf{F}$.

Laat C de doorsnijdingskromme zijn van de omwentelingsparaboloïde $z = x^2 + y^2$ en het vlak $z = 2$. C heeft een oriëntatie met de klok mee, gezien vanaf hoog op de z-as.

(b) Bereken $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

Laat het georiënteerde oppervlak S gegeven zijn door

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + y^2 = z,\ 1 \leq z \leq 2\}$$

met een naar buiten gericht normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$.

(c) Schets S.

(d) Welke oriëntatie wordt door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ geïnduceerd op de rand van S, gezien vanaf hoog op de z-as ? Geef dit aan in de schets uit (c).

(e) Bereken

$$\int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\ dS.$$