

Volledige Tentamen Analyse 2

Maandag 23 mei 2005, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de versie van het tentamen dat u maakt (volledig of deel), de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!

Succes!

1.) Laat D het volume binnen de paraboloid $z = x^2 + y^2$ dat onder $z = 2x$ ligt zijn.

(a) Bereken het volume van D .

Laat $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 2x\}$ met een normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ in de paraboloid.

(b) Bepaal de flux in S van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + (3z + 2)\mathbf{k}$, dat wil zeggen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

2.) Zij $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$. C is de rand van D met oriëntatie met de wijzers van de klok mee en laat $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}.$$

(a) Laat zien met behulp van integratie in \mathbf{R}^2 , dat de oppervlakte van D gelijk is aan ??.

(b) Bereken de circulatie

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

!! Vervolg op achterkant !!

Zij $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ met oriëntatie gegeven door het normaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ met niet-negatieve z -component. Laat $\mathbf{G} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{G}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + \sin(xyz) \mathbf{k}.$$

- (c) Schets S en geef duidelijk de oriëntatie aan op S en de oriëntatie op de rand van S geïnduceerd door de oriëntatie van S .
- (d) Bereken $\text{curl } \mathbf{G}$.
- (e) Bereken de flux

$$\int_S \text{curl } \mathbf{G} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \text{curl } \mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS.$$

3.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = xy(3 - x^2 - y^2)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}, \\ \partial R &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}, \text{ de rand van } R. \end{aligned}$$

- (a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x, y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.
- (b) Toon aan dat f negen kritieke punten op \mathbf{R}^2 heeft.
- (c) Laat zien dat f één extremum heeft in R . Is dit extremum een lokaal maximum of lokaal minimum? Licht uw antwoord toe.
- (d) De beperking van de functie f tot ∂R heeft ?? extrema. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.
- (e) De beperking van de functie f tot \overline{R} , i.e. R verenigd met de rand ∂R , heeft ?? extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).