== Hertentamen Analyse 2 ==

Vrijdag 18 augustus 2006, 10:00-13:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **drie** opgaven.

Succes!

1.) Laat C het deel zijn van de doorsnijdingskromme van het oppervlak $x^2+6y^2-z^2=2$ en het vlak $z=2y$ in $\mathbf{R}^3$ van het punt $(\sqrt{2},0,0)$ naar $(0,1,2)$. Laat het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x,y,z) := xy\,\mathbf{i} \;+\; (e^y+z)\,\mathbf{j} \;+\; x\,\mathbf{k}.$$

Bereken

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

2.) Laat C de snijlijn zijn van de bol $S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\, x^2+y^2+z^2=4\}$ met het vlak $x=1$ met oriëntatie van het punt $(1,1,\sqrt{2})$ naar het punt $(1,\sqrt{3},0)$. Laat het vectorveld $\mathbf{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$\mathbf{F}(x,y,z) := (z + ye^x \sin z)\,\mathbf{i} \;+\; e^x \sin z\,\mathbf{j} \;+\; (2y + ye^x \cos z)\,\mathbf{k}.$$

Laat verder $S^+ := \{(x,y,z) \in S |\, x \geq 1\}$.

(a) Bereken $\operatorname{div}\mathbf{F}$ en $\operatorname{curl}\mathbf{F}$.

(b) Schets S en de snijlijn C. Geef duidelijk de oriëntatie aan van C. Welke oriëntatie moet S^+ hebben, zodat de gegeven oriëntatie van C overeenkomt met die geïnduceerd op C door deze oriëntatie op S^+? Geef deze oriëntatie ook duidelijk aan in de schets.

(c) Bereken de flux van F door S^+ met de oriëntatie van opgave (b):

$$\int_{S^+} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS = \int_{S^+} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}.$$

(d) Bereken de circulatie

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2 - 4)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + 4y^2 < 16\}, \\ \partial R &= \text{de rand van } R, \\ \bar{R} &= \partial R \cup R \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x,y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f negen kritieke punten op $\mathbf{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f vier extrema heeft in R. Geef voor elk van deze extrema aan of het een maximum of minimum is. Licht uw antwoord toe.

(d) Bepaal de extrema van de functie f beperkt tot ∂R. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.

(e) De beperking van de functie f tot $\overline{R}$, i.e. R verenigd met de rand ∂R, heeft acht extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).