Tussentoets Analyse 2

Dinsdag 14 maart 2006, 9:00-11:00u

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer, de naam van uw docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en uw studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die u maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Deze toets bestaat uit **drie** (3) opgaven!

Succes!

1.) Zij $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x,y,z) &= F_1(x,y,z)\ \mathbf{i}\ +\ F_2(x,y,z)\ \mathbf{j}\ +\ F_3(x,y,z)\ \mathbf{k} \\ &= e^{xy}\ \mathbf{i}\ +\ \sin(xz)\ \mathbf{j}\ +\ \ln(yz)\ \mathbf{k} \\ &= (e^{xy},\ \sin(xz),\ \ln(yz))^T \end{aligned}$$

en $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $f(x,y,z) = F_3(x,y,z) = \ln(yz)$.

(a) Geef het domein van F.

(b) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{F}(x,y,z)$.

(c) Bepaal div $\mathbf{F}$, curl $\mathbf{F}$ en grad f.

(d) Bereken de lineaire benadering van f rond het punt $(0,1,\frac{1}{2})$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s,t) &= \frac{1}{t}\ \mathbf{i}\ + t\ \mathbf{j}\ + st\ \mathbf{k} \\ &= (\frac{1}{t},\ t,\ st)^T \end{aligned}$$

en $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $H(s,t) = F(G(s,t))$.

(e) Bereken de Jacobi-matrix $D\mathbf{H}(s,t)$ met behulp van de kettingregel voor functies van meerdere variabelen.

2.) Laat $\mathcal{C}$ de doorsnijdingskromme van de vlakken $x^2 + z^2 = 4$ en $x + 2y + 3z = 4$ zijn.

(a) Geef een parametrisatie $\mathbf{r}(t)$ van de kromme $\mathcal{C}$. Bepaal ook het bijbehorende parameterdomein.

(b) Bepaal de snelheid $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ en de grootte (i.e. lengte) van deze snelheid.

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Laat $\mathcal{C}_1$ de kromme zijn gegeven door de parametrisatie

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= 2t\ \mathbf{i}\ +\ t^2\ \mathbf{j}\ +\ \frac{1}{3}t^3\ \mathbf{k} \\ &= (2t,\ t^2,\ \frac{1}{3}t^3)^T \end{aligned}$$

waarbij $0 \leq t \leq 1$. Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de scalaire functie gedefinieerd door $g(x, y, z) = x + 3z$.

(a) Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathcal{C}_1} g ds$.

Zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ het vectorveld gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x, y, z) &= \sin(\pi x)\ \mathbf{i}\ -\ e^x\ \mathbf{j}\ +\ (5y + 6z)\ \mathbf{k} \\ &= (\sin(\pi x),\ -e^x,\ (5y + 6z))^T \end{aligned}$$

(b) Bepaal de lijnintegraal van de tangentiële component van $\mathbf{G}$ langs de kromme $\mathcal{C}_1$:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}$$

.