== Hertentamen Analyse 2 ==

Maandag 20 augustus 2007, 10:00-13:00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, V. Rottschäfer) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **twee** opgaven.

Succes!

1.) Laat D het begrensde gebied in $\mathbb{R}^3$ zijn dat ingesloten wordt door de oppervlakken met vergelijking $3z = x^2 + y^2$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. De rand van D, ∂D, heeft standaardoriëntatie, i.e. het eenheidsnormaalvectorveld $\hat{\mathbf{N}}$ is naar buiten gericht. ∂D bestaat uit twee delen, $\mathcal{S}_1$ dat ligt op $3z = x^2 + y^2$ en $\mathcal{S}_2$ op $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$ hebben hun rand gemeenschappelijk. Noem deze kromme $\mathcal{C}$. We geven $\mathcal{C}$ de oriëntatie met de wijzers van de klok mee, gezien hoog vanaf de positieve z-as.

(a) Schets D. Geef in de schets de oppervlakken $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$ aan en de kromme $\mathcal{C}$. Geef ook duidelijk hun oriëntatie aan zoals hierboven gegeven.

(b) Bereken het volume van D.

$\mathbf{F}$ is het vectorveld op $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) := y^2\,\mathbf{i} \;+\; x^2\,\mathbf{j} \;+\; z\mathbf{k} \;=\; (\,y^2,\, x^2,\, z\,).$$

(c) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door $\mathcal{S}_1$, i.e.

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

(d) Bereken $\operatorname{div}\mathbf{F}$ en $\operatorname{curl}\mathbf{F}$.

(e) Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door ∂D, i.e.

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

(f) Bereken de circulatie

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet\, d\mathbf{r}.$$

!! Vervolg op achterkant !!

2.) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = (x^2+y^2-2)(y^2-x^2)$ en laat

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 < 4\}, \\ \partial R &= \text{de rand van } R, \\ \bar{R} &= \partial R \cup R \end{aligned}$$

(a) Schets de niveaulijnen behorende bij $f(x,y) = 0$ en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Schets ook ∂R in hetzelfde figuur.

(b) Toon aan dat f negen kritieke punten op $\mathbb{R}^2$ heeft.

(c) Laat zien dat f vier extrema heeft in R. Geef voor elk van deze extrema aan of het een maximum of minimum is en bereken hun grootte. Licht het antwoord toe.

(d) Bepaal de extrema van de functie f beperkt tot ∂R. Bereken plaats, aard (lokaal/globaal, minimum/maximum) en grootte van deze.

(e) De beperking van de functie f tot $\overline{R}$, i.e. R verenigd met de rand ∂R, heeft acht extrema. Bepaal deze (i.e. bereken plaats, aard en grootte - zie (d)).