Tentamen Analyse 4

Maandag 4 juni 2007, 14:00-17:00

Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (bij voorkeur korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan. Boeken, aantekeningen, telefoon en andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

1. (a) Formuleer de residuenstelling van Cauchy.

   (b) Bereken de integraal
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

2. Hoeveel nulpunten (geteld naar multipliciteit) heeft de functie
   $$f(z) = z^{37} + 4z^3 - z + 1$$
   in de open eenheidsschijf $D(0;1)$?

3. Laat f een holomorfe functie zijn op $\mathbb{C}$ zo dat $|f(z)| = 1$ op $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$ en $|f(z)| = c$ op $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 2\}$ voor een reëel getal c.

   (a) Bewijs dat $c \geq 1$.

   (b) Bewijs: als $c = 1$, dan is f constant op de schijf $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| < 1\}$.

   (c) Bewijs: als $c = 2$, dan heeft f een nulpunt in $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 2\}$.

4. Laat de functie f gegeven zijn door
   $$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(1-\mathrm{e}^z)}.$$

   (a) Geef een zo groot mogelijke $r > 0$ zo dat f gelijk is aan een Laurentreeks op $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < r\}$.

   (b) Laat zien dat het hoofddeel van de Laurentreeks van f rond 0 gelijk is aan
   $$-\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{12z}.$$

   (c) Laat $N > 0$. Laat γ_N de rechthoekige contour zijn met hoekpunten $N + (2N+1)\pi i$, $-N + (2N+1)\pi i$, $-N - (2N+1)\pi i$ en $N - (2N+1)\pi i$. Bereken $\int_{\gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z$ voor $N \in \mathbb{N}$ met $N \geq 1$.

   (d) Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

z.o.z.

5. Beschouw de multifunctie $[\![\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)]\!]$.

   (a) Bepaal het beeld van de verzameling $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < 0\}$ onder de afbeelding $w = \frac{z+1}{z-1}$.

   (b) Bepaal een snede voor deze multifunctie en laat zien dat er een holomorfe tak f is met $\arg(f(x)) = 0$ voor reële x voldoende groot.

   (c) Geef de Laurentreeks van f met centrum $z = 1$.

   (d) Bepaal een reeksuitdrukking voor de continue inverse Laplace-getransformeerde van f.

6. Beschouw de harmonische functie

$$u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{op } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0,\ y > 0\}.$$

   (a) Bepaal een harmonisch geconjugeerde functie v van u.

   (b) Laat

$$\tilde{u}(x, y) := u(-y, x) = -y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{op } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0,\ y > 0\}.$$

   Is $\tilde{u}$ harmonisch op $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0,\ y > 0\}$?

EINDE

Tabel van Laplace-getransformeerden

$f(t)$	$\overline{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}},\ \operatorname{Re} p > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2},\ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2},\ \operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} a\rvert$
$e^{at} f(t)$	$\overline{f}(p-a)$
$f(t/a),\ a > 0$	$a\overline{f}(pa)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n\overline{f}(p) - p^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\overline{f}^{(n)}(p)$

Punten per opgave:

opgave	1	2	3	4	5	6	totaal
punten	6	4	7	8	7	4	36