

Tussentoets Analyse 2. Natuur- en sterrenkunde.

Dinsdag 10 maart 2009, 9.00-11.00.

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of redenering.

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2+y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$. (6 pt)
- b) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-1, 1, 1)$. (5 pt)
- c) Ga na of f partieel differentieerbaar is naar x en y in het punt $(0, 0)$ en bepaal zo mogelijk de partiële afgeleiden in $(0, 0)$. (5 pt)
- d) Ga na of f totaal differentieerbaar is in $(0, 0)$. (4 pt)

2. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een willekeurige differentieerbare functie zijn.

Toon aan dat $z = f(x^2 - y^2)$ een oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (5 \text{ pt})$$

Op de ommezijde staat de rest van de opgaven.

3. De temperatuur in een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$T(x, y) = xy.$$

- a) Teken de niveaulijnen (de "isothermen") voor $T = -2, -1, 0, 1, 2$. (4 pt)

- b) In welke richting vanuit het punt $(1, -2)$ daalt de temperatuur het snelst? (4 pt)

Een deeltje Q beweegt zich met een snelheid $v = 3$ vanuit het punt $(1, -2)$ in de richting $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c) Bereken de snelheid van verandering van temperatuur voor het deeltje Q op het tijdstip dat Q zich in het punt $(1, -2)$ bevindt. (5 pt)

4. De (gesloten) kromme C is de snijkromme van de elliptische cilinder $x^2 + 2y^2 = 9$ met het vlak $y + z = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Het punt $P(-1, 2, -2)$ ligt op C .

- a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme C in het punt P . (6 pt)

- b) Bereken de lengte van de kromme C . (4 pt)

5. Een punt R doorloopt een gladde kromme $\mathcal{C}$ zo, dat op elk moment de versnellingsvector orthogonaal is met de snelheidsvector.

Bewijs dat de grootte van de snelheid (de "speed") van R constant is. (5 pt)