

Tussentoets Analyse 2. Antwoorden.

- 1a. Dit mag door poolcoördinaten te gebruiken in combinatie met afschatten. Dus

$$|f(x, y)| = r^2 |\cos \phi \sin \phi (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)| \leq r^2.$$

Omdat $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0$, is ook $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ en dus is f inderdaad continu in $(0, 0)$.

b.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y^4 x - 4y^2 x^3 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- c. $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 2) = 2$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 2) = 2$, de vergelijking van het raakvlak is dus $z - 0 = 2(x + 2) + 2(y - 2)$ (ofwel $z = 2x + 2y$).

- d. Er geldt dat $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$, analoog is $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

- e. f is totaal differentieerbaar in $(0, 0)$ als

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Vanwege (d) komt dit neer op

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3 k - h k^3}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 0.$$

Dat deze limiet nul is kan analoog aan (a) worden aangetoond. Het is ook mogelijk om de stelling te gebruiken dat f totaal differentieerbaar is indien de partiële afgeleiden van f bestaan overal en continu in $(0, 0)$ zijn. Laten zien dat $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ en $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ gaat weer analoog aan (a).

- 2a. $\mathbf{r}'(t) = (-\pi t \sin \pi t + \cos \pi t, \pi t \cos \pi t + \sin \pi t, \sqrt{2\pi t})$. De booglengte is gelijk aan

$$L = \int_0^2 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 2\pi t + \pi^2 t^2} dt = \int_0^2 (1 + \pi t) dt = 2 + 2\pi.$$

- b.** Voor het genoemde punt is $t = 1/2$. Een raakvector aan de kromme in dit punt is

$$\mathbf{r}'(1/2) = (-\pi/2, 1, \sqrt{\pi}).$$

Nu geldt

$$\sin \theta = \frac{\mathbf{r}'(1/2) \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}'(1/2)| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{\pi}}{1 + \pi/2}.$$

- 3a.** T is constant dan en slechts dan als $y - x^2$ constant is. Dit geeft een familie (dal)parabolen. Niveaulijnen bij $T = 1/e, 1, e$ zijn nu makkelijk te tekenen.

- b.** $\nabla T(x, y) = (2xT, -T)$ dus $\nabla T(2, 3)$ is evenredig met $(4, -1)$, de temperatuur daalt dus het snelst in de richting $(-4, 1)$.

- c.** De snelheidsvector is $\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{5}}(1, -2)$.

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla T(2, 3) = \frac{24e}{\sqrt{5}}.$$

- 5.** Het is voldoende om te bewijzen dat $|\mathbf{r}(t)|$ constant is, dus dat $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt} = 0$ (of dat $\frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt} = 0$). Dit volgt uit

$$\frac{d|\mathbf{r}(t)|}{dt} = \frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$$

en

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) = 0.$$

Het uitproduct is nul omdat $\mathbf{b} \times \mathbf{r}$ orthogonaal is met $\mathbf{r}$ (dit is een eigenschap van het uitwendig product).