Antwoorden bij het tentamen van 18 juni 2009.

1a. Een geschikte coördinatentransformatie is

$$u = y/x, \ v = xy. \qquad (1 \le u, v \le 4).$$

De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_1^4 \int_1^4 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, du \, dv = \int_1^4 \int_1^4 \frac{1}{2u} \, du \, dv = \ln 8.$$

b. Noem de vier stukken (in volgorde van doorlopen, beginnend bij (1,1)): C_1, C_2, C_3, C_4. Een parametrisatie van C_1 is: $\mathbf{r}(t) = (1/t, t)$, $1 \le t \le 2$. De lijnintegraal over C_1 is

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \begin{pmatrix} t \\ -1/t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/t^2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -2 \ln 2.$$

De integralen over C_2, C_3, C_4 zijn resp. $0, 8\ln 2, 0$. De circulatie van $\mathbf{F}$ over ∂D is dus $6 \ln 2$.

c. Met de stelling van Green:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_D (\nabla \times \mathbf{F})_3 dA = 2 \iint_D dA = 2 \ln 8 = 6 \ln 2.$$

2a. De niveaulijnen zijn de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en de rechte $x + y = 0$.

b. Het oplossen van $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ levert de punten $(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ (een minimum), $(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$ (een maximum), $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (een zadelpunt), $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (een zadelpunt). Het karakter van de stationaire punten is direct af te lezen uit de niveaukrommentekening bij a.

c. Met de multiplicatorenmethode van Lagrange of door $y = 4/x$ te substitueren in $f(x, y)$ vinden we voor het stuk van de rand dat op $xy = 4$ ligt, een minimum in $(2, 2)$ ter waarde 16. Verder zijn er randmaxima in $(1, 4)$ en $(4, 1)$ ter waarde 65. Op de stukken waar $x = 4$ of $y = 4$ zijn er alleen randmaxima in $(1, 4)$ en $(4, 1)$ en randminima in $(0, 4)$ resp. $(4, 0)$ ter waarde 48. Op de stukken waar $x = 0$ of $y = 0$ zijn er minima in $(0, \sqrt{4/3})$ en $(\sqrt{4/3}, 0)$ ter waarde $-16/(3\sqrt{3})$, verder is er een randmaximum in $(0, 0)$ ter waarde 0 en de reeds gevonden randmaxima in $(4, 0)$ en $(0, 4)$. Het maximum op ∂R is dus 65 en het minimum is $-16/(3\sqrt{3})$. In het punt $(2, 2)$ is er alleen een lokaal minimum met waarde 16.

d. Het globale minimum is $-16\sqrt{2}/3\sqrt{3}$ en wordt aangenomen in het inwendige punt $(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$; het globale maximum is 65 dat in de punten $(4, 1)$ en $(1, 4)$ aangenomen wordt.

3a. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4z + 2xe^y$.

b. Neen want $\nabla \times \mathbf{F}$ is niet identiek nul.

c. Een deel van een eenbladige hyperboloïde (een omwentelingsoppervlak met als as de z-as, ziet er uit als een koeltoren van een elektriciteitscentrale).

d. De inhoud is (gebruik cylindercoördinaten):

$$\int_{-1}^{1} dz \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{1+z^2} r \, dr = \frac{56}{15}\pi.$$

e.

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint F_3 dS = \iint 2dS = 8\pi.$$

en

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = -\iint F_3 dS = -\iint 2dS = -8\pi.$$

f. Parametriseer S_3 d.m.v.

$$x = (1+z^2)\cos\phi, \;\; y = (1+z^2)\sin\phi, \;\; z = z.$$

Dan is een uitwendige normaal $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \times \frac{d\mathbf{r}}{dz} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z(1+z^2) \end{pmatrix}$ en het oppervlakte-element is $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \mathbf{N} d\phi \; dz$:

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \; dz = -2\pi \int_{-1}^{1} z(1+z^2)^2 dz = 0.$$

g. Volgens de divergentiestelling is

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0$$

vanwege e en f. Een andere manier om de integraal uit te rekenen is rechtstreeks: uit de uitdrukking voor div $\mathbf{F}$ in a volgt dat de integraal 0 is omdat elk van de termen oneven is (in z resp. x) en uit de symmetrische ligging van het gebied V.