Tussentoets Analyse 2. Natuur- en sterrenkunde.

Dinsdag 9 maart 2010, 9.00-11.00.

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
Motiveer elk antwoord dat je geeft d.m.v. een berekening of redenering.

---

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Toon aan dat f een continue functie is in $(0,0)$. (4 pt)

b) Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$. (4 pt)

c) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-2,2,0)$. (4 pt)

d) Ga na of f partieel differentieerbaar is naar x en y in het punt $(0,0)$ en bepaal zo mogelijk de partiële afgeleiden in $(0,0)$. (4 pt)

e) Ga na of f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$. (5 pt)

2. De ruimtekromme $C \subset \mathbb{R}^3$ heeft als parametrisatie

$$x(t) = t\cos \pi t, \quad y(t) = t \sin \pi t, \quad z(t) = \frac{2}{3}t\sqrt{2\pi t}$$

voor $0 \leq t \leq 2$.

a. Bereken de booglengte van C. (6 pt)

b. ℓ is de raaklijn aan C in het punt $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\sqrt{\pi})$. ℓ snijdt het vlak $z = 0$ onder een hoek θ. Bereken $\sin\theta$. (5 pt)

***** Op de ommezijde staat de rest van de opgaven. *****

3. De temperatuur in een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$T(x, y) = e^{x^2 - y}.$$

a. Teken een paar niveaulijnen (minstens drie) van T. (4 pt)

b. In welke richting vanuit het punt $(2, 3)$ daalt de temperatuur het snelst? (3 pt)

Een deeltje Q beweegt eenparig langs het x, y-vlak in de richting $(1, -2)$ met een snelheid $v = 4$ en passeert daarbij op zekere tijdstip het punt $(2, 3)$.

c. Bereken de snelheid waarmee de temperatuur voor het deeltje Q verandert op het tijdstip dat Q zich in het punt $(2, 3)$ bevindt. (4 pt)

4. Voor de positievector $\mathbf{r}(t)$ van een punt R in $\mathbb{R}^3$ op tijdstip t geldt dat

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} \times \mathbf{r}(t)$$

voor een vaste eenheidsvector $\mathbf{b}$.

a. Bewijs dat $\mathbf{r}(t)$ voor alle t op een bol ligt waarvan het middelpunt de oorsprong is. (4 pt)

*** EINDE ***

Tussentoets Analyse 2. Correctiemodel.

Per rekenfout max. 1 punt aftrek. Voor een schrijffout die van weinig invloed is op het verdere verloop van de opgave hoef je niets af te trekken. Bij elk antwoord moet een uitwerking of beredenering worden gegeven. Je hoeft niet al te streng na te kijken. Dat het argument correct is, is natuurlijk wel belangrijk. Eerder gemaakte fouten kunnen worden doorgerekend tenzij de opgave daardoor veel eenvoudiger wordt. Een andere oplossingsmethode waarin niet voorzien is in dit correctievoorschrift, is uiteraard toegestaan. Dan normeren in de geest van het correctiemodel. Bij twijfel openlaten en door mij laten bekijken.

1a. Dit mag door poolcoördinaten te gebruiken in combinatie met afschatten. Dus

$$|f(x,y)| = r^2|\cos\phi\sin\phi(\sin^2\phi - \cos^2\phi)| \leq r^2$$

($2r^2$ of zo mag ook). Omdat $\lim_{r\to 0} r^2 = 0$, is ook

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

en dus is f inderdaad continu in $(0,0)$.

Geen punten aftrekken als de afschatstelling niet expliciet genoemd is, als hij goed wordt toegepast, is het al goed. 1 punt voor het opschrijven van $f(x,y)$ in poolcoördinaten, 1 voor correct afschatten, 1 voor r^2 naar 0 (dus gebruik afschatstelling) en 1 voor de conclusie.

b.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y^4x - 4y^2x^3 + x^5}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \text{(2+2 pt)}$$

c. $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2) = 2$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,2) = 2$, de vergelijking van het raakvlak is dus $z - 0 = 2(x+2) + 2(y-2)$ (ofwel $z = 2x + 2y$. De haakjes hoeven niet perse te worden uitgewerkt.)

2 pt voor de coëfficiënten van x en y, 2 pt voor de rest.

d. Er geldt dat $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$, analoog is $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2 pt voor het opschrijven van de juiste limieten, 2 pt voor de rest van de berekening.

e. De partiële afgeleiden van f bestaan overal en zijn continu in $(0,0)$ dus f is totaal differentieerbaar in $(0,0)$. Laten zien dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ gaat analoog aan (a) (met poolcoördinaten). Opmerken dat de limiet voor $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ geheel analoog gaat, is voldoende. 2 punten voor het gebruiken/noemen van de stelling, 3 punten voor het aantonen dat de partiële afgeleiden inderdaad continu zijn.

2a. De booglengte is gelijk aan

$$L = \int_0^2 |\mathbf{r}'(t)|\ dt = \int_0^2 (1 + \pi t) dt = 2 + 2\pi.$$

1 pt voor $L = \int_0^2 |\mathbf{r}'(t)|\ dt$, 3 pt voor $\mathbf{r}'(t)| = |1 + \pi t|$. 2 pt voor het antwoord (dus het berekenen van de integraal).

b. Voor het genoemde punt is $t = 1/2$ (1 pt). Een raakvector aan de kromme in dit punt is

$$\mathbf{r}'(1/2) = (-\pi/2, 1, \sqrt{\pi}). \qquad \text{(1 pt)}$$

Nu geldt

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{r}'(1/2)\cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}'(1/2)|\cdot|\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{\pi}}{1 + \pi/2}. \qquad \text{(3 pt)}$$

3a. 3 punten voor 3 niveaulijnen (met waarden voor T), 1 pt voor wat commentaar. Als de bijbehorende waarden voor T ontbreken dan max. 2 pt geven.

b. $\nabla T(x,y) = (2xT, -T)$ dus $\nabla T(2,3)$ is evenredig met $(4,-1)$ (2 pt), de temperatuur daalt dus het snelst in de richting $(-4,1)$. (1 pt)

c. De snelheidsvector is $\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{5}}(1, -2)$. (2 pt)

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla T(2, 3) = \frac{24e}{\sqrt{5}}. \qquad \text{(2 pt)}$$

2 pt aftrekken als is vergeten de snelheidsvector correct te normeren. De wortel in het antwoord hoeft niet herleid te worden.

5. Het is voldoende om te bewijzen dat $|\mathbf{r}(t)|$ constant is, dus dat $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt} = 0$ (of dat $\frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt} = 0$) (1 pt). Dit volgt uit

$$\frac{d|\mathbf{r}(t)|}{dt} = \frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|}. \qquad \text{(1 pt)}$$

Nu is

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) = \det(\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{r}) = 0. \qquad \text{(1 pt)}$$

De determinant is nul omdat er twee gelijke (kolom)vectoren zijn. (1 pt)