Antwoorden juni 2011.

1a. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-1/\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-1/\sqrt{x^2+y^2}}.$

b. Gebruik de definitie $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De partiële afgeleiden in $(0,0)$ zijn 0.

c. Er zijn twee manieren: f is differentieerbaar in $(0,0)$ als

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

(dit is het geval!) of gebruik - en vermeld - de stelling dat f differentieerbaar is in $(0,0)$ als de partiële afgeleiden zijn gedefinieerd op een omgeving van $(0,0)$ en continu in $(0,0)$ zijn. In het laatste geval moet worden aangetoond dat de partiële afgeleiden continu zijn in $(0,0)$.

2a. De partiële afgeleiden nul stellen geeft

$$(y-1)(3y^2+x^2-2x-2) = 0, \quad (x-1)(3x^2+y^2-2y-2) = 0.$$

Dit levert de stationaire punten $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2})$. De eerste drie zijn zadelpunten, de vierde een minimum, de laatste twee zijn maxima. De aard kan ook worden aangetoond door een tekenschema-niveaulijnenplaatje te tekenen!

(Opmerking: $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ indien (i) $x-1=0$ en $y-1=0$. Dit geeft $(1,1)$. (ii) $x-1=0$ en $3y^2+x^2-2x-2=0$. Dit levert $(1,1)$ en $(1,-1)$. (iii) $y-1=0$ en $3x^2+y^2-2y-2=0$. Dit levert $(1,1)$ en $(-1,1)$. (iv) $3x^2+y^2-2y-2=0$ en $3y^2+x^2-2x-2=0$. Dit levert behalve $(1,1)$ de drie laatste punten. N.B.: Nooit te snel haakjes wegwerken. Een ontbinding in factoren terugvinden is niet zo makkelijk, zeker niet bij functies van meer variabelen.)

b. Als $x^2+y^2=25$ dan is $g(x,y) = 23(x-1)(y-1)$. Lagrange multplicatoren toepassen voor deze functie geeft $y-1=\lambda x$ en $x-1=\lambda y$ dus $y(y-1)=x(x-1)$. Dit is het geval als $y=x$ of $y=1-x$ (tweedegraadsvergelijking in y dus twee oplossingen!). Dit levert de vier punten $(4,-3)$, $(-3,4)$, $(\sqrt{25/2}, \sqrt{25/2})$ en $(-\sqrt{25/2}, -\sqrt{25/2})$. In de eerste twee punten neemt g een minimum aan ter waarde $-12\cdot 23$, in het laatste punt een maximum van $23(\sqrt{25/2}+1)^2$.

Een andere methode is, om een parametrisatie van de cirkel $x(t) = 5\cos t, y(t) = 5\sin t$ in te vullen: dit levert $F(t) = g(x(t),y(t)) = 23(5\cos t - 1)(5\sin t - 1)$. $F'(t) = 23(5\cos t - 5\sin t)(5\cos t + 5\sin t - 1)$. $F'(t) = 0$ als $x=y$ of $x+y=1$, hetzelfde resultaat als voor de multiplicatorenmethode.

3a. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en $\nabla \times \mathbf{F} = (2(y-z), 2(z-x), 2(x-y))$.

b. De rand van V is een omwentelingslichaam. De onderkant is een kegel met top $(0,0,-1)$ en grondvlak de cirkel $x^2+y^2=1$, $z=0$. De bovenkant ontstaat door de grafiek van $z=(1-x^2)e^{-x^2}$ om de z-as te wentelen.

c. De inhoud is

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} ((1-x^2-y^2)e^{-x^2-y^2} + 1 - \sqrt{x^2+y^2})\, dA = \frac{\pi}{e} + \frac{\pi}{3}.$$

Gebruik poolcoördinaten om de integraal te berekenen. Voor de onderkant van het gebied mag ook worden gebruikt dat het een kegel is met hoogte 1 en grondvlak een cirkel met straal 1. De inhoud van zo'n kegel is $\pi/3$.

d. Omdat $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ is volgens de stelling van Gauss de flux gelijk aan de flux door de cirkelschijf $D = \{x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\}$ omhoog. Dit is

$$\iint_D \mathbf{F}_3\, dA = \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2\, dA = \frac{\pi}{4}.$$

Het kan ook wel zonder Gauss toe te passen en direct de fluxintegraal te berekenen; je krijgt dan de integraal van een functie met e-machten erin die wel te primitiveren is (mits poolcoördinaten gebruikt worden), maar met Gauss gaat het een stuk eenvoudiger omdat je over een eenvoudiger gebied integreert.

e. De integraal rechtstreeks berekenen m.b.v. een parametrisatie geeft $-\frac{2}{3}$ (er zijn drie lijnstukken, met drie parametrisaties):

$$-\int_0^1 (t^2+1)\, dt - \int_{-1}^0 (t^2-(2t+1)^2)\, dt + \int_{-1}^1 t^2\, dt = -\frac{2}{3}.$$

Hetzelfde antwoord krijgen we, m.b.v. de stelling van Stokes, door de integraal $\iint_I (\nabla \times \mathbf{F})_2\, dA = \iint_I 2(z-x)\, dx\, dz$ te berekenen, waarbij $I = \{y=0,\ -1 \leq z \leq 0,\ -1-z \leq x \leq 1+z\}$ het inwendige van de driehoek in het vlak $y=0$ is. De integrand hangt niet van y af dus het is een gewone herhaalde integraal in twee variabelen.